第 1 章

基礎解析

1　式の計算

1. 1 (1) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+3}$

解説 $\dfrac{4(x+2)}{(x+1)^2(x+3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x+3}$ とおくと

$4x+8=A(x+1)(x+3)+B(x+3)+C(x+1)^2$

$x=-1$ を代入して $4=2B \quad \therefore B=2$

$x=-3$ を代入して $-4=4C \quad \therefore C=-1$

$x=-2$ を代入して $0=-A+B+C \quad \therefore A=1$

(2) $\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

解説 $\dfrac{4x^2}{x^4-1}=\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2+1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)}$

解説　例えば $n=3$ のとき

$\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{a_0}{x}+\dfrac{a_1}{x+1}+\dfrac{a_2}{x+2}+\dfrac{a_3}{x+3}$ とおくと

$1=a_0(x+1)(x+2)(x+3)+a_1x(x+2)(x+3)+a_2x(x+1)(x+3)+a_3x(x+1)(x+2)$

$x=0$ を代入して $1=a_0\cdot 1\cdot 2\cdot 3 \quad \therefore a_0=\dfrac{1}{3!}$

$x=-1$ を代入して $1=a_1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2 \quad \therefore a_1=-\dfrac{1}{1!2!}$

$x=-2$ を代入して $1=a_2\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 1 \quad \therefore a_2=\dfrac{1}{2!1!}$

$x=-3$ を代入して $1=a_3\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1) \quad \therefore a_3=-\dfrac{1}{3!}$

$\therefore \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{1}{3!x}+\dfrac{1}{1!2!(x+1)}+\dfrac{1}{2!1!(x+2)}+\dfrac{1}{3!(x+3)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)}$

一般の n について

$\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\dfrac{a_0}{x}+\dfrac{a_1}{x+1}+\cdots+\dfrac{a_k}{x+k}+\cdots+\dfrac{a_n}{x+n}$ とおくと

$$1=a_0(x+1)(x+2)\cdots(x+n)+a_1x(x+2)\cdots(x+n)+\cdots$$
$$+a_kx(x+1)\cdots(x+k-1)(x+k+1)\cdots(x+n)+\cdots+a_nx(x+1)\cdots(x+n-1)$$

$x=0$ を代入して $1=a_0\cdot 1\cdot 2\cdots n \quad \therefore a_0=\dfrac{1}{n!}$

$x=-1$ を代入して $1=a_1\cdot(-1)\cdot 1\cdots(n-1) \quad \therefore a_1=-\dfrac{1}{(n-1)!}$

$\cdots$

$x=-k$ を代入して $1=a_k\cdot(-k)\cdot(-k+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdots(n-k)\quad \therefore a_k=(-1)^k\dfrac{1}{k!(n-k)!}$

$\cdots$

$x=-n$ を代入して $1=a_n\cdot(-n)\cdot(-n+1)\cdots(-1)\quad \therefore a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n!}$

$$\therefore \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)}$$

1．2　1, 2, -3

解説　$\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+7x}{y}=\dfrac{x-y}{z}=k$ とおくと

$$\begin{cases} y+z=kx & \cdots(1) \\ z+7x=ky & \cdots(2) \\ x-y=kz & \cdots(3) \end{cases}$$

(1) $-$ (2) より　$y-7x=kx-ky\ \therefore (k+1)y=(k+7)x\quad\cdots(4)$

(1)$\times k+$ (3) より　$ky+kz+x-y=k^2x+kz\ \therefore (k-1)y=(k^2-1)x$

よって $(k-1)y=(k-1)(k+1)x\quad\cdots(5)$

(4)$\times(k-1)-$ (5)$\times(k+1)$ より $0=(k-1)(k+7)x-(k+1)^2(k-1)x$

$\therefore (k-1)(k^2+k-6)x=0$

元の式の分母であることから $x\neq 0$ ゆえに $(k-1)(k^2+k-6)=0$

よって $(k-1)(k-2)(k+3)=0$ 結局 $k=1,\ 2,\ -3$

1．3　$12a=8b+9$ が成立しているとき $\lambda_1=\dfrac{3}{2},\ \lambda_2=\dfrac{2}{3}b-\lambda,\ \lambda_3=\lambda,\ \lambda_4=c-\dfrac{2}{3}b\lambda+\lambda^2$　(λ は任意の数)

それ以外の場合は解なし

解説　
$$\begin{aligned} x^4+3x^3+ax^2+bx+c&=\{(x+\lambda_1)x+\lambda_2\}\{(x+\lambda_1)x+\lambda_3\}+\lambda_4 \\ &=(x+\lambda_1)^2x^2+(\lambda_2+\lambda_3)(x+\lambda_1)x+\lambda_2\lambda_3+\lambda_4 \\ &=x^4+2\lambda_1x^3+(\lambda_1^2+\lambda_2+\lambda_3)x^2+(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_1x+\lambda_2\lambda_3+\lambda_4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3=2\lambda_1 & \cdots(1) \\ a=\lambda_1^2+\lambda_2+\lambda_3 & \cdots(2) \\ b=(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_1 & \cdots(3) \\ c=\lambda_2\lambda_3+\lambda_4 & \cdots(4) \end{cases}$$

(1) より $\lambda_1=\dfrac{3}{2}$　これを (2), (3) に代入して

$\lambda_2+\lambda_3=a-\dfrac{9}{4},\ \lambda_2+\lambda_3=\dfrac{2}{3}b$

よって $a-\dfrac{9}{4}\neq\dfrac{2}{3}b$ 即ち $12a-8b\neq 27$ のとき解なし．

$12a-8b=27$ のとき $\lambda_3=\lambda$　(任意の数) とすると $\lambda_2=\dfrac{2}{3}b-\lambda,\ \lambda_4=c-\dfrac{2}{3}b\lambda+\lambda^2.$

1．4　$\alpha^2\neq\beta$ のとき $\dfrac{(m-p\alpha-q)(x^2-\beta)}{\alpha^2-\beta}+px+q$

$\alpha^2=\beta,\ m=p\alpha+q$ のとき $ax^2+px+q-a\beta$　(a は任意定数)

$\alpha^2=\beta,\ m\neq p\alpha+q$ のとき不能

解説　$f(x)=(x-\alpha)(x^2-\beta)q(x)+Ax^2+Bx+C$ とおく．

剰余の定理より　$m=f(\alpha)=A\alpha^2+B\alpha+C\quad\cdots(1)$

また $f(x)=(x^2-\beta)\{(x-\alpha)q(x)+A\}+Bx+C+A\beta$ これから $f(x)$ を $x^2-\beta$ で割った余りは

$Bx+C+A\beta=px+q\quad\therefore B=p,\ C+A\beta=q\quad\cdots(2)$

(2) より $C=q-A\beta$ これと $B=p$ を (1) に代入して $m=A\alpha^2+p\alpha+q-A\beta\quad\cdots(3)$

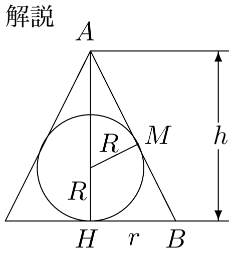
よって $\alpha^2\neq\beta$ のとき $A=\dfrac{m-p\alpha-q}{\alpha^2-\beta},\ B=p,\ C=q-\dfrac{\beta(m-p\alpha-q)}{\alpha^2-\beta)}$

$\alpha^2=\beta$ のとき (3) より $m=p\alpha+q$ 従って $\alpha^2=\beta,\ m\neq p\alpha+q$ のとき解なし

$\alpha^2=\beta,\ m=p\alpha+q$ のとき $A=a$(任意定数) とすると $B=p,\ C=q-a\beta$

1. 5　$\dfrac{r\left(\sqrt{h^2+r^2}-r\right)}{h}$

解説



$AB=\sqrt{r^2+h^2}$

$(\sqrt{r^2+h^2}-r)^2+R^2=(h-R)^2$

$2r^2-2r\sqrt{r^2+h^2}=-2hR$

$R=\dfrac{r(\sqrt{r^2+h^2}-r)}{h}$

2　方程式

2. 1　$x=3\pm 2i,\ 4\pm\sqrt{3}$

解説　4 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$, 題意より $\alpha\beta=\gamma\delta$ とすると

$x^4-14x^3+74x^2-182x+169=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

$=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\{x^2-(\gamma+\delta)x+\gamma\delta\}$

$=x^4-\{(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)\}x^3+\{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+\alpha\beta+\gamma\delta\}x^2-\{(\alpha+\beta)\gamma\delta+(\gamma+\delta)\alpha\beta\}x+(\alpha\beta)(\gamma\delta)$

よって $\begin{cases}14=(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta) & \cdots(1)\\ 74=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+\alpha\beta+\gamma\delta & \cdots(2)\\ 182=(\alpha+\beta)\gamma\delta+(\gamma+\delta)\alpha\beta & \cdots(3)\\ 169=(\alpha\beta)(\gamma\delta) & \cdots(4)\end{cases}$

$\alpha\beta=\gamma\delta$ だから (4) より $\alpha\beta=\gamma\delta=\pm\sqrt{169}=\pm 13$

(3) より $182=\pm 13\{(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)\}\ \therefore \pm 14=(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)$

よって (1) より $\alpha\beta=\gamma\delta=13\quad\cdots(5)$

(2) より $74=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+26\ \therefore 48=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\quad\cdots(6)$

(1), (6) より $\alpha+\beta,\ \gamma+\delta=6,\ 8$ これと (5) より

$x^4-14x^3+74x^2-182x+169=(x^2-6x+13)(x^2-8x+13)=0$

$\therefore x^2-6x+13=0$ または $x^2-8x+13=0$ これを解いて $x=3\pm 2i,\ 4\pm\sqrt{3}$

2. 2　$x^3=1,\ ax^2+bx+c=0$ ならば $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

<u>証明</u> 仮定より $c=-ax^2-bx$. よって

$a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+b^3+(-ax^2-bx)^3-3ab(-ax^2-bx)$

$=a^3+b^3-a^3x^6-3a^2bx^5-3ab^2x^4-b^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x$

$=a^3(1-x^6)+3a^2b(x^2-x^5)+3ab^2(x-x^4)+b^3(1-x^3)$

$=(1-x^3)\{a^3(1+x^3)+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3\}$

仮定より $x^3=1$. よって $1-x^3=0$ だから

$a^3+b^3+c^3-3abc=0.$　<u>証明終り</u>

2. 3 (1) $x^3+(2q-p^2)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0$

解説　題意より $x^3+px^2+qx+r=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

$\therefore \begin{cases}p=-(\alpha+\beta+\gamma)\\ q=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\\ r=-\alpha\beta\gamma\end{cases}$

求める方程式は $(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)=x^3-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2+(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)x-\alpha^2\beta^2\gamma^2=0$

$p^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2q$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=p^2-2q$

$q^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta^2\gamma+2\beta\gamma^2\alpha+2\gamma\alpha^2\beta$

$=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2pr$

$\therefore \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=q^2-2pr$

$r^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2$

$\therefore$ 求める方程式は $x^3+(2q-p^2)x^2+(q^2-2pr)x-r^2=0$

(2) $x^3-qx^2+prx-r^2=0$

解説　求める方程式は $(x-\alpha\beta)(x-\beta\gamma)(x-\gamma\alpha)=x^3-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2+(\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta+)x-\alpha^2\beta^2\gamma^2$

$=x^3-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)x-\alpha^2\beta^2\gamma^2$

$=x^3-qx^2+prx-r^2=0$

2. 4　$x=t,\ y=2t-1,\ z=t$　(t は任意の数)

解説 $\begin{cases} x-2y+3z=2 & \cdots(1) \\ 2x-3y+4z=3 & \cdots(2) \\ 3x-8y+13z=8 & \cdots(3) \end{cases}$

(2)$-$(1)$\times$2 より $y-2z=-1\quad\cdots(4)$

(3)$-$(1)$\times$3 より $-2y+4z=2 \therefore y-2z=-1$

$z=t$(任意定数) とおくと (4) より $y=2t-1$(1) より $x=t$

2. 5　証明 解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=-p,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q,\ \alpha\beta\gamma=-r$

n に関する数学的帰納法による

[1] $n=1$ のとき $a_1=\alpha+\beta+\gamma=-p$. よって a_1 は整数

$n=2$ のとき $a_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=p^2-2q$. よって a_2 は整数

$n=3$ のとき α,β,γ は $x^3+px^2+qx+r=0$ の解だから

$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0,\ \beta^3+p\beta^2+q\beta+r=0,\ \gamma^3+p\gamma^2+q\gamma+r=0.$

よって $a_3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-p\alpha^2-q\alpha-r-p\beta^2-q\beta-r-p\gamma^2-q\gamma-r$

$=-p(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-q(\alpha+\beta+\gamma)-3r=-pa_2-qa_1-3r$. よって a_3 は整数

[2] $n=k,\ k-1,\ k-2$ のとき a_n は整数とする. ($k\geqq 4$)

$n=k+1$ のとき $n=3$ のときと同様に

$a_{k+1}=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}+\gamma^{k+1}=\alpha^{k-2}\alpha^3+\beta^{k-2}\beta^3+\gamma^{k-2}\gamma^3$

$=\alpha^{k-2}(-p\alpha^2-q\alpha-r)+\beta^{k-2}(-p\beta^2-q\beta-r)+\gamma^{k-2}(-p\gamma^2-q\gamma-r)$

$=-p(\alpha^k+\beta^k+\gamma^k)-q(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1}+\gamma^{k-1})-r(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2}+\gamma^{k-2})$

$=-pa_k-qa_{k-1}-ra_{k-2}$. よって a_{k+1} は整数

[1], [2] よりすべての自然数 n に対して a_n は整数.　証明終り

2. 6　$\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}\omega,\ \sqrt[3]{3}\omega^2$, ここで $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

解説　$z^3=3$ とする. z が実数ならば $z=\sqrt[3]{3}$.

ここで $z=\sqrt[3]{3}u$ とおくと $z^3=3$ より $(\sqrt[3]{3}u)^3=3u^3=3 \therefore u^3=1,\ u^3-1=0$

$u^3-1=(u-1)(u^2+u+1) \therefore u=1$ または $u^2+u+1=0 \therefore u=1$ または $u=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ だから

$z=\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}\omega,\ \sqrt[3]{3}\omega^2$

3　三角関数

3．1　$8x^4-8x^2+1$

解説　2 倍角の公式より $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\therefore \cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta-1)^2-1 = 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta+1)-1 = 8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1 = 8x^4-8x^2+1$

3．2　$x = n\pi + \dfrac{\pi}{24},\ n\pi+\dfrac{5\pi}{24},\ n\pi-\dfrac{\pi}{4}$　(n は任意の整数)

解説　和差を積になおす公式より

右辺 $= \sin 3x + \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{3x+x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3x-x-\frac{\pi}{2}}{2}\right) = 2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$ を逆に使って $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\therefore$ 右辺 $= 2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって $2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \left(2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$\therefore \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ または $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{4} = 2n\pi+\dfrac{\pi}{3},\ 2n\pi+\dfrac{2\pi}{3}$ または $x+\dfrac{\pi}{4} = n\pi$

$\therefore x = n\pi+\dfrac{\pi}{24},\ n\pi+\dfrac{5\pi}{24},\ n\pi-\dfrac{\pi}{4}$

3．3　$0<\gamma<\pi$ のとき, $2\sin\dfrac{\gamma}{2},\ \alpha = \dfrac{\gamma}{2}+2n\pi,\ \beta = \dfrac{\gamma}{2}-2n\pi$

$-\pi<\gamma<0$ のとき, $-2\sin\dfrac{\gamma}{2},\ \alpha = \dfrac{\gamma}{2}+(2n+1)\pi,\ \beta = \dfrac{\gamma}{2}-(2n+1)\pi$

解説　$\alpha+\beta=\gamma$ より $\beta=\gamma-\alpha$ だから, 和差を積になおす公式より

$\sin\alpha+\sin\beta = \sin\alpha+\sin(\gamma-\alpha) = 2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\left(\alpha-\dfrac{\gamma}{2}\right)$

$-1 \leqq \cos\left(\alpha-\dfrac{\gamma}{2}\right) \leqq 1$ だから $2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\left(\alpha-\dfrac{\gamma}{2}\right) \leqq 2\left|\sin\dfrac{\gamma}{2}\right|$

即ち $-\pi<\gamma<0$ のとき $\sin\dfrac{\gamma}{2}<0$ だから $\cos\left(\alpha-\dfrac{\gamma}{2}\right) = -1$ のときに最大値 $2\left|\sin\dfrac{\gamma}{2}\right| = -2\sin\dfrac{\gamma}{2}$

従って $\alpha-\dfrac{\gamma}{2} = \pi+2n\pi$ $\therefore \alpha = \dfrac{\gamma}{2}+(2n+1)\pi,\ \beta = \dfrac{\gamma}{2}-(2n+1)\pi$ のときに最大値 $-2\sin\dfrac{\gamma}{2}$

同様に $0<\gamma<\pi$ のとき $\sin\dfrac{\gamma}{2}>0$ だから $\cos\left(\alpha-\dfrac{\gamma}{2}\right) = 1$ のときに最大値 $2\left|\sin\dfrac{\gamma}{2}\right| = 2\sin\dfrac{\gamma}{2}$

従って $\alpha-\dfrac{\gamma}{2} = 2n\pi$ $\therefore \alpha = \dfrac{\gamma}{2}+2n\pi,\ \beta = \dfrac{\gamma}{2}-2n\pi$ のときに最大値 $2\sin\dfrac{\gamma}{2}$

3．4　$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\sin x$

解説　$\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x\cos\dfrac{2\pi}{3} - \sin x\sin\dfrac{2\pi}{3} + \sin x\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}\sin x$$

3．5 (1) ± 35

解説　解と係数の関係より $\sin 2\theta + \cos 2\theta = \dfrac{k}{25}$, $\sin 2\theta \cos 2\theta = \dfrac{12}{25}$

第 1 式を 2 乗して右辺 $= (\sin 2\theta + \cos 2\theta)^2 = \sin^2 2\theta + 2\sin 2\theta\cos 2\theta + \cos^2 2\theta = 1 + 2\sin 2\theta \cos 2\theta$

$\therefore 1 + 2\sin 2\theta\cos 2\theta = \dfrac{k^2}{25^2}$ これと第 2 式より $1 + \dfrac{24}{25} = \dfrac{k^2}{25^2}$ $\quad \therefore k^2 = 25^2\left(1 + \dfrac{24}{25}\right) = 25\cdot 49 = 5^2\cdot 7^2$

$\therefore k = \pm 5\cdot 7 = \pm 35$

(2) $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{4}{3}$

解説　(1) より元の 2 次方程式は $25x^2 \pm 35x + 12 = 0$ $\therefore (5x\pm 3)(5x\pm 4) = 0$ $\therefore x = \pm\dfrac{3}{5}, \pm\dfrac{4}{5}$

$\therefore (\sin 2\theta,\ \cos 2\theta) = \left(\pm\dfrac{3}{5}, \pm\dfrac{4}{5}\right)$ または $\left(\pm\dfrac{4}{5}, \pm\dfrac{3}{5}\right)$

$\therefore \tan 2\theta = \dfrac{3}{4}$ または $\dfrac{4}{3}$

(3) -2, -3, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$

解説　2 倍角の公式により $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\tan 2\theta = \dfrac{4}{3}$ のとき $\dfrac{4}{3} = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ $\quad \therefore 4\tan^2\theta + 6\tan\theta - 4 = 0$

$\therefore 2(\tan\theta + 2)(2\tan\theta - 1) = 0$ $\quad \therefore \tan\theta = -2, \dfrac{1}{2}$

$\tan 2\theta = \dfrac{3}{4}$ のとき $\dfrac{3}{4} = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ $\quad \therefore 3\tan^2\theta + 8\tan\theta - 3 = 0$

$\therefore (\tan\theta + 3)(3\tan\theta - 1) = 0$ $\quad \therefore \tan\theta = -3, \dfrac{1}{3}$

3. 6　$a = 5$, $\tan\phi = \dfrac{3}{4}$

解説　$3\sin x + 4\cos x = 5\left(\dfrac{3}{5}\sin x + \dfrac{4}{5}\cos x\right)$ ここで $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ とすると

$3\sin x + 4\cos x = 5(\sin\alpha\sin x + \cos\alpha\cos x) = 5\cos(x-\alpha)$ $\quad \therefore 5\cos(x-\alpha) = a\cos(x-\phi)$

$\therefore a = 5,\ \phi = \alpha$ $\quad \therefore \tan\phi = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{4}$

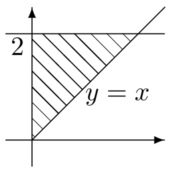
3. 7 (1) $a > 1$ ならば $a^a > a^1 > 1$. $a = 1$ ならば $a^a = 1$. 仮定より $a^a < 1$ だから $a < 1$

(2) 仮定より $b > a^a$, (1) より $a < 1$ だから $\log_a b < \log_a a^a = a < 1$

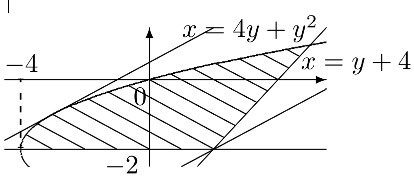
(3) (2) より $\log_a b < 1 = \log_a a$, (1) より $a < 1$ だから $b > a$. 仮定より $b > a^a$ だから $\log_a b < \log_a a^a = a$.
よって $\log_a b < b$. 従って $\log_a(\log_a b) > \log_a b$

4　領域

4. 1



4. 2



$(-3, -1)$ で最大値 1, $(2, -2)$ で最小値 -6

解説　$2y - x = k$ とおくと, これを満たす点は直線 $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{k}{2}$ 上のにある. このような点が題意の領域に存在するには, 直線が図の斜線部分と共有点を持てばよい. 図より, このとき切片が最大となるのは, 直線 $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{k}{2}$ が放物線 $x = 4y + y^2$ に接するときで $x = 4\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{k}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{k}{2}\right)^2$ $\therefore x^2 + (2k+4)x + k^2 + 8k = 0 \cdots (1)$

判別式 $D=0$ より $(2k+4)^2-4(k^2+8k)=4k^2+16k+16-4k^2-32k=-16k+16=0 \therefore K=1$.
このとき接点は (1) より $x^2+6x+9=(x+3)^2=0 \therefore x=-3,\ y=\dfrac{1}{2}\cdot(-3)+\dfrac{1}{2}=-1$, よって $(-3,-1)$.
即ち $(-3,\ -1)$ で最大値 1.
一方, 切片が最小となるのは, 直線 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$ が直線 $y=-2$ と直線 $x=y+4$ との交点を通るときで,
この交点は $\begin{cases} y=-2 \\ x=y+4 \end{cases}$ より $y=-2, x=2$, よって $(2,\ -2)$.
即ち $(2,\ -2)$ で最小値 $2y-x=2\cdot(-2)-2=-6$.

5　場合の数

5. 1 (1) 50

解説　2 の倍数 (偶数) は $2=2\cdot1$ から $100=2\cdot50$ までの 50 個

(2) 16

解説　2 と 3 の倍数, 即ち 6 の倍数は $6=6\cdot1$ から $96=6\cdot16$ までの 16 個

(3) 26

解説　(1), (2) と同様に 3 の倍数 $(=33)$, 5 の倍数 $(=20)$, 10 の倍数 $(=10)$, 15 の倍数 $(=6)$, 30 の倍数 $(=3)$ を求めて,

2 または 3 または 5 の倍数 =2 の倍数 +3 の倍数 +5 の倍数 −6 の倍数 −10 の倍数 −15 の倍数 +30 の倍数

$=50+33+20-16-10-6+3=74.$

よって, 2, 3, 5 の倍数でない数は $100-74=26$

5. 2　18

解説　1, 1, 3, 3 を奇数番目 (1 番目, 3 番目, 5 番目, 7 番目) に並べる並べ方は 4 つの場所から 1 を並べる 2 つの場所を選ぶ選び方を考えればよいので, ${}_4C_2=6$. 同様に 2, 2, 4 を残りの偶数番目に並べる並べ方は ${}_3C_2=3$. よって求める並べ方は $6\times3=18$(通り)

5. 3　758

解説　<u>a を 3 個, その他 1 個の場合</u> その他の選び方 × 選んだ 4 個の並べ方 $=5\times\dfrac{4!}{3!}=20$

<u>$a,\ b,\ c$ から 2 種類 2 個ずつの場合</u> 2 種類の選び方 × 選んだ 4 個の並べ方 $={}_3C_2\times\dfrac{4!}{2!2!}=18$

<u>$a,\ b,\ c$ から 1 種類を 2 個それ以外 (選んだ 1 種類以外) から 1 個ずつの場合</u>

1 種類の選び方 ×1 個ずつの選び方 × 選んだ 4 個の並べ方 $={}_3C_1\times{}_5C_3\times\dfrac{4!}{2!}=360$

<u>1 個ずつ 4 種類の場合</u> 4 種類の選び方 × 選んだ 4 個の並べ方 $={}_6C_4\times4!=360$

$\therefore 20+18+360+360=758$

5. 4 (1) 3432

解説　$f(i,\ j)$ は $A(0,\ 0)$ から $M(i,\ j)$ までの最短路の数である. これらは縦 i 本と横 j 本, 合計 $i+j$ 本の道を組み合わせてできている. その組み合わせ方は縦, 横 2 つのものから重複をゆるして $i+j$ 個とる順列となるので, $f(i,\ j)=\dfrac{(i+j)!}{i!j!}$. よって $f(7,\ 7)=\dfrac{14!}{7!7!}=3432$

(2) $f(i,\ j)\times f(m-i,\ n-j)$

解説　$A(0,\ 0)$ から $M(i,\ j)$ までの最短路の数が $f(i,\ j)$ であり, $M(i,\ j)$ から $B(m,\ n)$ までの最短路の数は $A(0,\ 0)$ から $(m-i,\ n-j)$ までの最短路の数と同じで $f(m-i,\ n-j)$ であるから, 求める最短路の数は $f(i,\ j)\times f(m-i,\ n-j)$ である.

(3) $f(i,\ j)\times f(m-i,\ n-j)+f(k,\ l)\times f(m-k,\ n-l)-f(i,\ j)\times f(k-i,\ l-j)\times f(m-k,\ n-l)$

解説　(2) より $A(0,\ 0)$ から $M(i,\ j)$ を通り $B(m,\ n)$ までの最短路の数は $f(i,\ j)\times f(m-i,\ n-j)$. 同様に $A(0,\ 0)$ から $N(k,\ l)$ を通り $B(m,\ n)$ までの最短路の数は $f(k,\ l)\times f(m-k,\ n-l)$ である. この 2 つの最短路が重複するのは $M,\ N$ を同時に通るときで, このような最短路の数は

$f(i,j)\times f(k-i,l-j)\times f(m-k,n-l)$ である．よって求める最短路の数は

$f(i,j)\times f(m-i,n-j)+f(k,l)\times f(m-k,n-l)-f(i,j)\times f(k-i,l-j)\times f(m-k,n-l)$

5. 5　2 ビットで表される状態　00　01　10　11, 3 ビットで 8 通り, 4 ビットで 16 通り, $\cdots$, 10 ビットで 1024 通り, 1 から 10 までの数字は 4 ビット, A から Z までの文字は 5 ビット必要

5. 6　55980

解説　10 人がそれぞれ A, B, C のうちどの車に乗るかを選択すると 3^{10} 通り．1 台の車にだれも乗らない場合が含まれるので, A に乗らない場合, 10 人の選択は B, C になるので 2^{10}．同様に B に乗らない場合, C に乗らない場合も 2^{10}．これらを差し引くと $3^{10}-3\cdot 2^{10}$．ところが A に乗らない場合と B に乗らない場合は A, B とも乗らない場合が重複する．この場合の数は $1^{10}=1$．A に乗らない場合と C に乗らない場合, B に乗らない場合と C に乗らない場合も同様だから, 結局, 求める場合の数は $3^{10}-3\cdot 2^{10}+3\cdot 1=59049-3072+3=55980$

5. 7　2^n

解説　白以外の n 個のボール 1 個 1 個について選ぶか選ばないかの選択が 2 通りあり, 選んだボールの数が n 個に満たないときは残りを白のボールとすればよい．

5. 8　56

解説　5. 4(1) の解説参照．5. 4 の $f(3,5)=\dfrac{8!}{3!5!}=56$

6　二項定理

6. 1 (1) 1

解説　二項定理より $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} {}_nC_m x^m(1-x)^{n-m}=\{x+(1-x)\}^n=1$

(2) x

解説　$\dfrac{m}{n}{}_nC_m=\dfrac{m}{n}\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=\dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}={}_{n-1}C_{m-1}$.

よって $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}{}_nC_m x^m(1-x)^{n-m}=\sum_{m=1}^{n}{}_{n-1}C_{m-1}x^m(1-x)^{n-m}$ ここで $r=m-1$ とすれば

与式 $\displaystyle=\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}C_r x^{r+1}(1-x)^{n-1-r}=x\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}C_r x^r(1-x)^{n-1-r}=x\{x+(1-x)\}^{n-1}=x$

(3) $\dfrac{(n-1)x^2+x}{n}$

解説　$\dfrac{m^2}{n^2}{}_nC_m=\dfrac{m^2}{n^2}\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=\dfrac{m(n-1)!}{n(m-1)!(n-m)!}=\dfrac{m}{n}{}_{n-1}C_{m-1}$ さらに $m\geqq 2$ ならば

$$\frac{m^2}{n^2}{}_nC_m=\frac{\{(m-1)+1\}(n-1)!}{n(m-1)!(n-m)!}=\frac{(m-1)(n-1)!}{n(m-1)!(n-m)!}+\frac{(n-1)!}{n(m-1)!(n-m)!}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)!}{n(m-2)!(n-m)!}+\frac{(n-1)!}{n(m-1)!(n-m)!}=\frac{n-1}{n}{}_{n-2}C_{m-2}+\frac{1}{n}{}_{n-1}C_{m-1}$$

よって $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{m^2}{n^2}{}_nC_m x^m(1-x)^{n-m}=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n}{}_{n-1}C_{m-1}x^m(1-x)^{n-m}+\sum_{m=2}^{n}\frac{n-1}{n}{}_{n-2}C_{m-2}x^m(1-x)^{n-m}$

ここでそれぞれ $r=m-1,\ s=m-2$ とすれば

与式 $\displaystyle=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}C_r x^{r+1}(1-x)^{n-1-r}+\frac{n-1}{n}\sum_{s=0}^{n-2}{}_{n-2}C_s x^{s+2}(1-x)^{n-2-s}$

$$=\frac{x}{n}\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}C_r x^r(1-x)^{n-1-r}+\frac{(n-1)x^2}{n}\sum_{s=0}^{n-2}{}_{n-2}C_s x^s(1-x)^{n-2-s}$$

$$=\frac{x}{n}\{x+(1-x)\}^{n-1}+\frac{(n-1)x^2}{n}\{x+(1-x)\}^{n-2}=\frac{x}{n}+\frac{(n-1)x^2}{n}$$

6. 2 (1) (a) 右辺 $={}_nC_{n-k}=\dfrac{n!}{(n-k)!\{n-(n-k)\}!}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}={}_nC_k=$ 左辺

(b) 右辺 $={}_n C_k + {}_n C_{k-1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$

$= \dfrac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = {}_{n+1}C_k =$ 左辺

(c) 二項定理により　左辺 $= \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_nC_k = (1-1)^n = 0 =$ 左辺

(2) (a) $\dfrac{(-1)^n {}_{2n}C_n}{2}$

解説　二項定理により $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k {}_{2n}C_k = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k(-1)^k 1^{2n-k} = \{(-1)+1\}^{2n} = 0.$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_{2n}C_k + \sum_{k=n+1}^{2n}(-1)^k {}_{2n}C_k = 0.$ ここで 2 番目の和を $r = 2n-k$ とすれば $k = 2n-r$ で,
r に関する $n-1$ から 0 までの和となる. この順序を逆にして

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_{2n}C_k + \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{2n-r} {}_{2n}C_{2n-r} = 0.$

(1)(a) より ${}_{2n}C_{2n-r} = {}_{2n}C_r$ また $(-1)^{2n-r} = (-1)^r$ だから $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_{2n}C_k + \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r {}_{2n}C_r = 0.$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_{2n}C_k + \sum_{r=0}^{n}(-1)^r {}_{2n}C_r = (-1)^n {}_{2n}C_n$

$\therefore 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_{2n}C_k = (-1)^n {}_{2n}C_n \quad \therefore \sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_{2n}C_k = \frac{(-1)^n {}_{2n}C_n}{2}$

(b) $(-1)^n {}_{2n}C_n$

解説　(1)(b) より $k \geqq 1$ ならば ${}_{2n+1}C_k = {}_{2n}C_k + {}_{2n}C_{k-1}$. よって

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_{2n+1}C_k = (-1)^0 {}_{2n+1}C_0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k {}_{2n+1}C_k = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k({}_{2n}C_k + {}_{2n}C_{k-1})$

$= 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k {}_{2n}C_k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k {}_{2n}C_{k-1}$

ここで第一の和で $k = 0$ のとき $(-1)^0 {}_{2n}C_0 = 1$ であることに注意し, 第二の和について $r = k-1$ とおくと,

与式 $= \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_{2n}C_k + \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1} {}_{2n}C_r = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_{2n}C_k - \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r {}_{2n}C_r = (-1)^n {}_{2n}C_n$

6. 3　1080

解説　二項定理より $(2x^3+3x^{-2})^5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} {}_5C_k(2x^3)^k(3x^{-2})^{5-k} = \sum_{k=0}^{5} {}_5C_k 2^k 3^{5-k} x^{3k+(-2)\cdot(5-k)}$

定数項は $x^0 = 1$ の係数だから $3k + (-2)\cdot(5-k) = 5k - 10 = 0$ より $k = 2$.

よって定数項 $= {}_5C_2 2^2 3^{5-2} = 10 \cdot 4 \cdot 27 = 1080$

6. 4　66

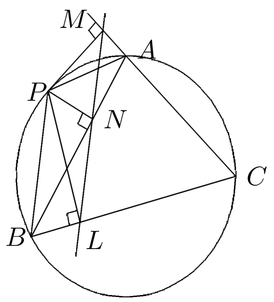
解説　二項定理より $(1+x)^{12} = \displaystyle\sum_{k=0}^{12} {}_{12}C_k 1^k x^{12-k}$. よって x^{10} の係数は ${}_{12}C_2 = \dfrac{12!}{2!10!} = \dfrac{12\cdot 11}{2\cdot 1} = 66$

第 2 章

解析幾何

1　平面図形

1．1



証明　P は弧 AB 上にあるとする．P から辺 BC, 辺 CA の延長線, 辺 AB におろした垂線のあしをそれぞれ $L,\ M,\ N$ とする．$A,\ P,\ B,\ C$ は同一円周上にあるから, $\angle ACB+\angle APB=2\angle R$. $PL,\ PM$ がそれぞれ $BC,\ CA$ の延長線への垂線であることから, $\angle PLC=\angle PMC=\angle R$. よって $P,\ M,\ C,\ L$ は同一円周上にあるから, $\angle ACB+\angle MPL=2\angle R$. $\therefore \angle APB=\angle MPL \therefore \angle BPL=\angle APM$. $PL,\ PN$ がそれぞれ $BC,\ AB$ への垂線であることから, $\angle PLB=\angle PNB=\angle R$. よって $P,\ N,\ L,\ B$ は同一円周上にあるから $\angle BPL=\angle BNL$. $PM,\ PN$ がそれぞれ CA の延長線, AB への垂線であることから, $\angle PMA=\angle PNA=\angle R$. よって $P,\ M,\ A,\ N$ は同一円周上にあるから $\angle APM=\angle MNA$. $\therefore \angle BNL=\angle MNA$　$\therefore L,\ M,\ N$ は一直線上にある.

1．2 (1) $(x-2)^2+(y-4)^2=4$

(2) $y=x+2\pm 2\sqrt{2}$

解説　$\begin{cases}(x-2)^2+(y-4)^2=4\\ y=x+k\end{cases}$ より $(x-2)^2+(x+k-4)^2=4$　$\therefore 2x^2+2(k-6)x+k^2-8k+16=0.$

接するのは $D=0$ のときだから $D=\{2(k-6)\}^2-4\cdot 2\cdot(k^2-8k+16)=-4(k^2-4k-4)=0$

よって $k=\dfrac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-4)}}{2}=2\pm 2\sqrt{2}.$

(3) $2(\sqrt{5}+1)$　点 $\left(2+\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ 4+\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$

解説　円周上の点を $P(x,\ y)$, 原点との距離を r とすると $\begin{cases}(x-2)^2+(y-4)^2=4 & \cdots(a)\\ x^2+y^2=r^2 & \cdots(b)\end{cases}$

$(a)-(b)$ より $-4x-8y+20=4-r^2$　$\therefore x=-2y+\dfrac{r^2}{4}+4$. これを (a) に代入して

$\left(-2y+\dfrac{r^2}{4}+4-2\right)^2+(y-4)^2=4$　$\therefore 5y^2-(r^2+16)y+\dfrac{r^4}{16}+r^2+16=0$. これが実数解 ($P$ の y 座標) をもつから $D=(r^2+16)^2-4\cdot5\cdot\left(\dfrac{r^4}{16}+r^2+16\right)\geqq 0$　$\therefore -\dfrac{r^4}{4}+12r^2-64\geqq 0$　$\therefore r^4-48r^2+256\leqq 0$

左辺 $=0$ の解は $\dfrac{48\pm\sqrt{48^2-4\cdot256}}{2}=24\pm8\sqrt{5}$　$\therefore 24-8\sqrt{5}\leqq r^2\leqq 24+8\sqrt{5}$. $\sqrt{24\pm8\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\pm2$ より $2\sqrt{5}-2\leqq r\leqq 2\sqrt{5}+2$ よって原点からの最長距離は $r=2\sqrt{5}+2$.

このとき $5y^2-(40+8\sqrt{5})y+96+32\sqrt{5}=0$　$\therefore 5\left(y-4-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$　$\therefore y=4+\dfrac{4}{\sqrt{5}},\ x=2+\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(別解) 円の中心を $C(2,\ 4)$, 円周上の点を $P(x,\ y)$ とすると $OC=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$,

$CP=$ 半径 $=2$. よって原点から P までの距離が最長となるのは $O,\ C,\ P$ が同一直線上に, この順で並ぶときで, 最長距離は $2\sqrt{5}+2$.

P は直線 $OC: y=2x$ 上にあるので, $2\sqrt{5}+2=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(2x)^2}=\sqrt{5}x$　(当然 $x\geqq 0$ である).

$\therefore x = 2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}},\ y = 4 + \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

1．3　$a = -1,\ -4,\ b = 0$

解説　(I): $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　　(II): $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(-2x - y) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(4x + 3y) \end{pmatrix}$$

$(x'',\ y'')$ も直線 $y = ax + b$ 上にあるから $y'' = ax'' + b$　$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{2}}(4x + 3y) = a \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-2x - y) + b$

$\therefore 4x + 3y = -2ax - ay + b\sqrt{2} \therefore (3 + a)y = (-2a - 4)x + b\sqrt{2} \therefore y = -\dfrac{2a + 4}{3 + a}x + \dfrac{b\sqrt{2}}{3 + a}$

$$\begin{cases} a = -\dfrac{2a + 4}{3 + a} \\ b = \dfrac{b\sqrt{2}}{3 + a} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a^2 + 5a + 4 = 0 \\ b(a + 3 - \sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

第１式より $(a + 1)(a + 4) = 0 \therefore a = -1,\ -4.$ よって第２式より $b = 0$

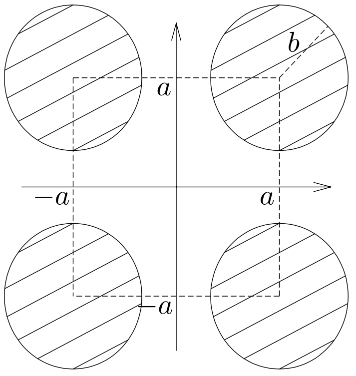
1．4　$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ (第一象限) のとき $(x - a)^2 + (y - a)^2 \leqq b^2$ (中心 $(a,\ a)$, 半径 b の円の内部)

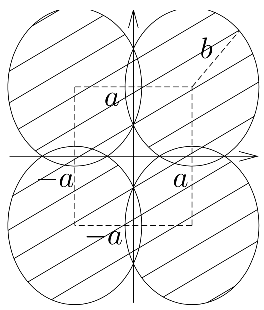
$x < 0,\ y \geqq 0$ (第二象限) のとき $(x + a)^2 + (y - a)^2 \leqq b^2$ (中心 $(-a,\ a)$, 半径 b の円の内部)

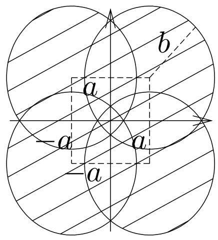
$x < 0,\ y < 0$ (第三象限) のとき $(x + a)^2 + (y + a)^2 \leqq b^2$ (中心 $(-a,\ -a)$, 半径 b をの円の内部)

$x \geqq 0,\ y < 0$ (第四象限) のとき $(x - a)^2 + (y + a)^2 \leqq b^2$ (中心 $(a,\ -a)$, 半径 b の円の内部)

よって $0 < b \leqq a$ のとき, 求める領域は右図のとおりで, 一つの円の面積が πb^2 だから求める領域の面積は $4\pi b^2$.







また $a < b \leqq \sqrt{2}a$ のとき, 求める領域は下左図のとおりで, 領域のうち第一象限にある部分の面積は円の面積からはみだした部分の面積を引けばよい.

円 $(x - a)^2 + (y - a)^2 = b^2$ のうち第二象限にはみだした部分の面積は積分によって

$\displaystyle\int_{a-b}^{0} \{(a + \sqrt{b^2 - (x - a)^2}) - (a - \sqrt{b^2 - (x - a)^2})\}dx = \int_{a-b}^{0} 2\sqrt{b^2 - (x - a)^2}dx$

$t = a - x$ とおけば $x : a - b \to 0$ のとき $t : b \to a,\ dt = -dx$ だから, この面積は

$-2\int_b^a \sqrt{b^2 - t^2}dt = -\left[t\sqrt{b^2 - t^2} + b^2 Sin^{-1}\dfrac{t}{b}\right]_b^a = -a\sqrt{b^2 - a^2} - b^2 Sin^{-1}\dfrac{a}{b} + b^2 Sin^{-1} 1$

$= \dfrac{\pi b^2}{2} - a\sqrt{b^2 - a^2} - b^2 Sin^{-1}\dfrac{a}{b}$

第三象限にはみだした部分も同じ面積をもつので第一象限にある部分の面積は

$\pi b^2 - 2(\dfrac{\pi b^2}{2} + a\sqrt{b^2 - a^2} + b^2 Sin^{-1}\dfrac{a}{b}) = 2a\sqrt{b^2 - a^2} + 2b^2 Sin^{-1}\dfrac{a}{b}$

よって求める領域の面積は $4(2a\sqrt{b^2 - a^2} + 2b^2 Sin^{-1}\dfrac{a}{b}) = 8a\sqrt{b^2 - a^2} + 8b^2 Sin^{-1}\dfrac{a}{b}$

また $\sqrt{2}a < b$ のとき, 求める領域は上右図のとおりで, 領域のうち第一象限にある部分の面積は積分によって

$\displaystyle\int_0^{a+\sqrt{b^2-a^2}} (a + \sqrt{b^2 - (x - a)^2})dx + \int_{a+\sqrt{b^2-a^2}}^{a+b} \{(a + \sqrt{b^2 - (x - a)^2}) - (a - \sqrt{b^2 - (x - a)^2})\}dx$

$t = x - a$ とおけば $x : 0 \to a + \sqrt{b^2 - a^2}$ のとき $t : -a \to \sqrt{b^2 - a^2}$,

$x : a + \sqrt{b^2 - a^2} \to a + b$ のとき $t : \sqrt{b^2 - a^2} \to b,\ dt = dx$ だから, 第１の積分は

$$\int_{-a}^{\sqrt{b^2-a^2}}(a+\sqrt{b^2-t^2})dt=\left[at+\frac{1}{2}\left(t\sqrt{b^2-t^2}+b^2Sin^{-1}\frac{t}{b}\right)\right]_{-a}^{\sqrt{b^2-a^2}}$$
$$=a(\sqrt{b^2-a^2}+a)+\frac{1}{2}\left(a\sqrt{b^2-a^2}+b^2Sin^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}+a\sqrt{b^2-a^2}+b^2Sin^{-1}\frac{a}{b}\right)$$
$$=a(2\sqrt{b^2-a^2}+a)+\frac{b^2}{2}\left(Sin^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}+Sin^{-1}\frac{a}{b}\right)$$
第 2 の積分は $\displaystyle\int_{\sqrt{b^2-a^2}}^{b}2\sqrt{b^2-t^2}dx=\left[t\sqrt{b^2-t^2}+b^2Sin^{-1}\frac{t}{b}\right]_{\sqrt{b^2-a^2}}^{b}$
$$=b^2Sin^{-1}1-a\sqrt{b^2-a^2}-b^2Sin^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\frac{\pi b^2}{2}-a\sqrt{b^2-a^2}-b^2Sin^{-1}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$$
よって第一象限にある部分の面積は $a(a+\sqrt{b^2-a^2})+\dfrac{\pi b^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}\left(Sin^{-1}\dfrac{a}{b}-Sin^{-1}\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)$

よって求める領域の面積は $4a(a+\sqrt{b^2-a^2})+2\pi b^2+2b^2\left(Sin^{-1}\dfrac{a}{b}-Sin^{-1}\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)$

1．5　2 次曲線の標準形 (楕円, 双曲線, 放物線) に変換するために座標軸の回転

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\cos\theta+Y\sin\theta\\ -X\sin\theta+Y\cos\theta\end{pmatrix}$ を行なうと

$$x^2-2axy+y^2=(X\cos\theta+Y\sin\theta)^2-2a(X\cos\theta+Y\sin\theta)(-X\sin\theta+Y\cos\theta)+(-X\sin\theta+Y\cos\theta)^2$$
$$=X^2\cos^2\theta+2XY\cos\theta\sin\theta+Y^2\sin\theta+2a\{X^2\sin\theta\cos\theta+XY(\cos^2\theta\sin^2\theta)+Y^2\sin\theta\cos\theta\}$$
$$+X^2\sin\theta-2XY\sin\theta\cos\theta+Y^2\cos^2\theta$$
$$=X^2(1-2a\sin\theta\cos\theta)+2aXY(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+Y^2(1+2a\sin\theta\cos\theta=1.$$

ここで XY の係数が 0 となれば標準形となるので, $\cos^2\theta-\sin^2\theta=0$.

よって $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, $\sin\theta=\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $\therefore X^2(1-a)+Y^2(1+a)=1$.

従って $a<-1$ のとき $1-a>0$, $1+a<0$. よって双曲線.

$a=-1$ のとき $2X^2=1$ $\therefore X=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. よって 2 直線.

$-1<a<1$ のとき $1-a>0$, $1+a>0$. よって楕円 (または円).

$a=1$ のとき $2Y^2=1$ $\therefore Y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. よって 2 直線.

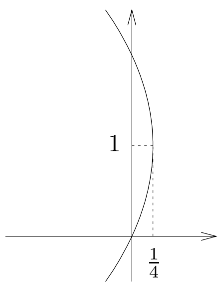
$a>1$ のとき $1-a<0$, $1+a>0$. よって双曲線. 以上により $-1<a<1$ のとき閉曲線.

1．6　$y^2+4x-2y=0$

$y^2-2y=-4x$

$(y-1)^2=-4x+1$

$\therefore (y-1)^2=4(-1)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$



1．7　$\left(-\dfrac{(s+t)(t+u)(u+s)}{2},\ \dfrac{s^2+t^2+u^2+st+tu+us+1}{2}\right)$

解説　円の中心を (a,b), 半径を r とすると円の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

$$\therefore\begin{cases}(s-a)^2+(s^2-b)^2=r^2\cdots(1)\\(t-a)^2+(t^2-b)^2=r^2\cdots(2)\\(u-a)^2+(u^2-b)^2=r^2\cdots(3)\end{cases}$$

$(1)-(2)$ より $(s^2-2as+a^2+s^4-2bs^2+b^2)-(t^2-2at+a^2+t^4-2bt^2+b^2)=0$

$\therefore s^4-t^4+(1-2b)(s^2-t^2)-2a(s-t)=0$, $(s-t)\{(s+t)(s^2+t^2)+(1-2b)(s+t)-2a\}=0$.

$s\neq t$ より $(s+t)(s^2+t^2)+(1-2b)(s+t)-2a=0\cdots(4)$.

同様に $(1)-(3)$ より $(s+u)(s^2+u^2)+(1-2b)(s+u)-2a=0\cdots(5)$.

$(4)-(5)$ より

$\{s^3+st^2+s^2t+t^3+s+t-2b(s+t)-2a\}-\{s^3+su^2+s^2u+u^3+s+u-2b(s+u)-2a\}=0,$
$s(t^2-u^2)+s^2(t-u)+t^3-u^3+t-u-2b(t-u)=0,$
$(t-u)\{s(t+u)+s^2+t^2+tu+u^2+1-2b\}=0.$
$t\neq u$ より $s(t+u)+s^2+t^2+tu+u^2+1=2b$ $\therefore b=\dfrac{s^2+t^2+u^2+st+tu+us+1}{2}.$
$(4)\times(s+u)-(5)\times(s+t)$ より

$$\{(s+t)(s+u)(s^2+t^2)+(1-2b)(s+t)(s+u)-2a(s+u)\}$$
$$-\{(s+t)(s+u)(s^2+u^2)+(1-2b)(s+t)(s+u)-2a(s+t)\}=0,$$

$(s+t)(s+u)(t^2-u^2)+2a(t-u)=(t-u)\{(s+t)(s+u)(t+u)+2a\}=0.$
$t\neq u$ より $2a=-(s+t)(s+u)(t+u)$, $\therefore a=-\dfrac{(s+t)(t+u)(u+s)}{2}.$

1．8　$\lambda=\mu=-2$, $2x+y-2=0$, $x-2y+1=0$

解説　2 直線を $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ とすると

$$2x^2-3xy+\lambda y^2+5y+\mu=(ax+by+c)(a'x+b'y+c')$$
$$=aa'x^2+(ab'+a'b)xy+bb'y^2+(ac'+a'c)x+(bc'+b'c)y+cc'.$$

よって $aa'=2$, $ab'+a'b=-3$, $bb'=\lambda$, $ac'+a'c=0$, $bc'+b'c=5$, $cc'=\mu\cdots(1).$
2 直線の傾きは $-\dfrac{a}{b}$, $-\dfrac{a'}{b'}$. 2 直線は直交するので $\left(-\dfrac{a}{b}\right)\left(-\dfrac{a'}{b'}\right)=-1.$ $\therefore aa'=-bb'.$
(1) より $\lambda=-2$.
因数分解によって $2x^2-3xy+\lambda y^2=2x^2-3xy-2y^2=(2x+y)(x-2y)$ だから,
$a=2$, $b=1$, $a'=1$, $b'=-2$ としてよい.
よって (1) より $2c'+c=0$, $c'-2c=5$. これを解いて $c'=1$, $c=-2$.
よって (1) より $\mu=cc'=-2$. 2 直線は $2x+y-2=0$, $x-2y+1=0$.

1．9　直線 $x+3y=0$

解説　直交座標軸を時計方向に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転する変換は

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

よって直線 $2x+y=0$ は $2\cdot\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}+\dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}}=0.$ すなわ $X+3Y=0.$
従って直線 $x+3y=0$ に移る.

1．10　$\begin{cases}x=(a+b)\cos t-b\cos\dfrac{a+b}{b}t\\ y=(a+b)\sin t-b\sin\dfrac{a+b}{b}t\end{cases}$

解説　半径 b の動円の中心を C, 動円の週上の点で最初に x 軸上にあった点を $P(x,\,y)$, その P が最初にあった x 軸上の点をA(a,　0), C と原点 (半径 a の定円の中心) を結ぶ直線と 2 円の交点を Q とすると C は $((a+b)\cos t,\,(a+b)\sin t)$. OA と OQ でできる定円の扇型の中心角は t だから, その弧の長さは at. すべらずに回転するので, CQ と CP でできる動円の扇型の弧の長さも at. 動円の半径は b だから, 中心角は $\dfrac{at}{b}$.
このとき C から x 軸の正の向きに引いた半直線と動径 CQ がなす角は $\pi+t$ だから, 動径 CP のなす角は

$$\pi+t+\frac{at}{b}=\pi+\frac{(a+b)t}{b}.\ \text{よってベクトル}\ \overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}b\cos\left(\pi+\dfrac{(a+b)t}{b}\right)\\ b\cos\left(\pi+\dfrac{(a+b)t}{b}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\cos\dfrac{(a+b)t}{b}\\ -b\cos\dfrac{(a+b)t}{b}\end{pmatrix}$$

$\therefore x=(a+b)\cos t-b\cos\dfrac{a+b}{b}t$, $y=(a+b)\sin t-b\sin\dfrac{a+b}{b}t$

2　直線・平面

2．1 (イ)　$\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

解説　平面 $Ax+By+Cz+D=0\cdots(1)$ の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$.

よって P_0 を通り, この平面に垂直な直線の方程式は $\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}\cdots(2)$
この直線と平面の交点は (2)$=t$ とおくと $x=x_0+At,\ y=y_0+Bt,\ z=z_0+Ct$ だから
(1) に代入して $Ax_0+A^2t+By_0+B^2t+Cz_0+C^2t+D=0\ \therefore t=\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}$.
これを t_0 とおけば, 交点の座標は $(x_0+At_0,\ y_0+Bt_0,\ z_0+Ct_0)$. P_0 との距離は

$$\sqrt{(At_0)^2+(Bt_0)^2+(Ct_0)^2}=|t_0|\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$
$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(ロ) $\left(\dfrac{1}{7},\ \dfrac{2}{7},\ \dfrac{3}{7}\right)$

解説　平面 $x+2y+3z=1$ に関して原点と対称な点を P とすると OP は平面と垂直だから, $\overrightarrow{OP}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

よって P の座標は $(t,\ 2t,\ 3t)$. 従って OP の中点の座標は $\left(\dfrac{t}{2},\ t,\ \dfrac{3t}{2}\right)$ で, OP の中点は平面上の点だから
$\dfrac{t}{2}+2t+3\cdot\dfrac{3t}{2}=1.\ \therefore t=\dfrac{1}{7}$. よって P の座標は $\left(\dfrac{1}{7},\ \dfrac{2}{7},\ \dfrac{3}{7}\right)$.

2. 2　$2(x-1)+1(y-1)+1(z-2)=0$ よって $2x+y+z=5$

2. 3　$9x-3y+5z=40$

解説　2 点 $(3,\ 4,\ 5),\ (3,\ -1,\ 2)$ を通り, 直線の方向ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と平行な平面を求めればよい.

求める平面を $ax+by+cz=d$ とすると法線ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ は直線の方向ベクトルと垂直だから
$-a+2b+3c=0\cdots(1)$. 2 点を通ることから $3a+4b+5c=d\cdots(2)$, $3a-b+2c=d\cdots(3)$.
(2)$-$(3) より $5b+3c=0\ \therefore c=-\dfrac{5}{3}b$. よって (1) より $a=-3b$. (2) より $d=-\dfrac{40}{3}$.
従って $b=-3$ とおけば $a=9,\ c=5,\ d=40.\ \therefore 9x-3y+5z=40$.

2. 4　証明 原点 O から平面 π までの距離 p が OH の長さに等しいから $\overrightarrow{OH}=t\begin{pmatrix} pl \\ pm \\ pn \end{pmatrix}$.

よって H の座標は $(pl,\ pm,\ pn)$.
平面 π は H を通り法線ベクトルが $\overrightarrow{OH}$ だから $pl(x-pl)+pm(y-pm)+pn(z-pn)=0$
$\therefore plx+pmy+pnz=p^2l^2+p^2m^2+p^2n^2$. $p=OH=\sqrt{p^2l^2+p^2m^2+p^2n^2}\ \therefore p^2=p^2l^2+p^2m^2+p^2n^2$.
平面 π の方程式は $plx+pmy+pnz=p^2\ \therefore lx+my+nz=p$.

2. 5　$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

解説　求めるベクトルを $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおくと, このベクトルは 2 つの平面の法線ベクトルと垂直だから

$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b-2c=0 \end{cases}$　$\therefore b=2c,\ a=-3c$. よって $c=-1$ とおけば $a=3,\ b=-2$.

2. 6　$\dfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma$　解説　各座標軸との交点は $(\alpha,\ 0,\ 0),\ (0,\ \beta,\ 0),\ (0,\ 0,\ \gamma)$ で, この 3 点と原点を結んだ三角錐になるので,

体積は $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\alpha\beta\right)\gamma = \dfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma$

2. 7　$3\sqrt{14}$

解説　平面 $x+2y+3z=6$ と各座標軸との交点は $A(6,\,0,\,0)$, $B(0,\,3,\,0)$, $C(0,\,0,\,2)$. $AB=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

C から AB に引いた垂線の足を $H(6-2t,\,t,\,0)$ とすると $AB\perp CH$. $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CH}=\begin{pmatrix}6-2t\\t\\-2\end{pmatrix}$

だから $-6(6-2t)+3t=0 \therefore t=\dfrac{12}{5}$. よって $H\left(\dfrac{6}{5},\,\dfrac{12}{5},\,0\right)$,

$CH=\sqrt{\left(\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(\dfrac{12}{5}\right)^2+(-2)^2}=2\sqrt{\dfrac{14}{5}}$. $\therefore$ 三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{\dfrac{14}{5}}=3\sqrt{14}$.

2. 8 (1) $P_0\left(\dfrac{1}{2},\,1,\,\dfrac{3}{2}\right)$

解説　P_0 は直線 l 上の点だから $x-1=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}=t$ とおくと $P_0(t+1,\,2t+2,\,3t+3)$.

これを π の方程式に代入して $(t+1)+(2t+2)+(3t+3)=3 \therefore t=-\dfrac{1}{2} \therefore P_0\left(\dfrac{1}{2},\,1,\,\dfrac{3}{2}\right)$.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

解説　平面 π の法線ベクトル (の 1 つ) は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. このベクトルの大きさは $\sqrt{3}$ だから単位法線ベクトルは $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(3) $P_0'(0,\,1,\,2)$

解説　点 $(1,\,2,\,3)$ を通り平面に垂直な直線 $x-1=y-2=z-3=t$ とおけば $P_0'(t+1,\,t+2,\,t+3)$.

よって平面の式より $(t+1)+(t+2)+(t+3)=3 \therefore t=-1 \therefore P_0'(0,\,1,\,2)$.

(4) $\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

解説　$\overrightarrow{P_0'P_0}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\0\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$. このベクトルの大きさは $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. よって求めるベクトルは $\sqrt{2}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\0\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

2. 9　$\left(0,\,b-\dfrac{av}{u},\,c-\dfrac{aw}{u}\right)$

解説　yz 平面の方程式は $x=0$ だから $-\dfrac{u}{a}=\dfrac{y-b}{v}=\dfrac{z-c}{w} \therefore y=b-\dfrac{av}{u},\ z=c-\dfrac{aw}{u}$.

2. 10　$x+y+z=1$, 距離 $\dfrac{11\sqrt{3}}{3}$

解説　求める平面の方程式を $ax+by+cz=d$ とすると $(1,\,0,\,0)$, $(0,\,1,\,0)$, $(0,\,0,\,1)$ を通るから

$a=d,\ b=d,\ c=d$. よって $d=1$ とすれば $x+y+z=1$.

点 $(3,\,4,\,5)$ を通り平面に垂直な直線 $x-3=y-4=z-5=t$ とおけばこの直線と平面の交点は

$(t+3,\,t+4,\,t+5)$ と表せる. 平面の方程式より $(t+3)+(t+4)+(t+5)=1 \therefore t=-\dfrac{11}{3}$

よって, この交点は $\left(-\dfrac{2}{3},\,\dfrac{1}{3},\,\dfrac{4}{3}\right)$. よって求める距離は $\sqrt{\left(3+\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(4-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(5-\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{11\sqrt{3}}{3}$

2. 11　$x+y-z=x_0+y_0-z_0$

解説　直線の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ は $1\cdot 1+1\cdot 2-1\cdot 3=0$ より平面 $x+y-z=0$ の法線ベクトルと直交する.

よって求める平面は同じ法線ベクトルで (x_0, y_0, z_0) を通ればよいから, $(x-x_0)+(y-y_0)-(z-z_0)=0$
$\therefore x+y-z=x_0+y_0-z_0$

3　球

3. 1 (1) $2x+y+2z=10$

解説　直線 g の方向ベクトルが平面 α の法線ベクトルになるから平面 α の方程式は
$(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-2)+(z-3)=0 \therefore 2x+y+2z=10.$

(2) $\dfrac{|2a+b+2c-10|}{3}$

解説　点 (a, b, c) から平面 α に引いた垂線 $\dfrac{x-a}{2}=y-b=\dfrac{z-c}{2}=t$ とおけば, この垂線と平面 α との交点は $(2t+a, t+b, 2t+c)$. これを平面の方程式に代入して $2(2t+a)+(t+b)+2(2t+c)=10$
$\therefore t=\dfrac{10-2a-b-2c}{9}$. よって点 (a, b, c) と交点との距離は
$\sqrt{(2t+a-a)^2+(t+b-b)^2+(2t+c-c)^2}=3|t|=\dfrac{|2a+b+2c-10|}{3}$

(3) $\dfrac{5}{4}$

解説　球の半径が最大となるのは球が各平面に内接するときで, このとき球の中心 (a, b, c) と各平面との距離は半径 r と等しい. $a, b, c>0$, $2a+b+2c<10$ であり, 各座標平面との距離はそれぞれ a, b, c なので
$r=a=b=c$. (2) より $\dfrac{|2a+b+2c-10|}{3}=\dfrac{10-2a-b-2c}{3}=\dfrac{10-5r}{3}=r$. よって $r=\dfrac{5}{4}$.

3. 2　$x+2y+3z=14$

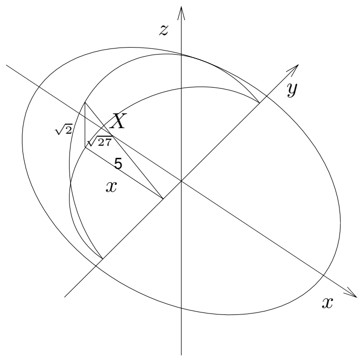
解説　$f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-14$ とすると $f_x=2x,\ f_y=2y,\ f_z=2z$ だから, 接平面の公式
$f_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+f_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)$ より
$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0 \therefore x+2y+3z=14.$

4　空間曲線

4. 1　法平面とは接点を通り, 接線と垂直な平面のことである. $\dfrac{dx}{dt}=2a\sin t\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=a(\cos^2 t-\sin^2 t)$, $\dfrac{dz}{dt}=-a\sin t$ だから, これらが t の値に対応する点における接線の方向ベクトルであり, 法平面の法線ベクトルである. 従って法平面の方程式は $2a\sin t\cos t(x-a\sin^2 t)+a(\cos^2 t-\sin^2 t)(y-a\sin t\cos t)-a\sin t(z-a\cos t)=0$. よって
$(2a\sin t\cos t)x-2a^2\sin^3 t\cos t+a(\cos^2 t-\sin^2 t)y-a^2\sin t\cos^3 t+a^2\sin^3 t\cos t-(a\sin t)z+a^2\sin t\cos t=0$
$\therefore ax\sin 2t+ay\cos 2t-az\sin t-a^2\sin^3 t\cos t-a^2\sin t\cos^3 t+a^2\sin t\cos t=0$
$\therefore ax\sin 2t+ay\cos 2t-az\sin t-a^2\sin t\cos t(\sin^2 t+\cos^2 t)+a^2\sin t\cos t=0$
$\therefore ax\sin 2t+ay\cos 2t-az\sin t-a^2\sin t\cos t+a^2\sin t\cos t=0 \therefore ax\sin 2t+ay\cos 2t-az\sin t=0.$
よって法平面は原点を通る.

5　2 次曲面

5．1



切り口の曲線上の点 $P(x,\,y,\,z)$ は $\begin{cases}\sqrt{2}x+5z=0\cdots(1)\\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1\cdots(2)\end{cases}$ を満たす．

(1) より $z=-\dfrac{\sqrt{2}x}{5}$．よって (2) より

$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{2x^2}{25}=1\ \therefore\ \dfrac{3x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\cdots(3)$

よって切り口の曲線の xy 平面への正射影は (3) を満たす．

平面 $\sqrt{2}x+5z=0$ 上に y 軸と垂直な方向に X 軸を設ける．つまり X 軸の xy 平面への正射影が x 軸である．図より $x=\dfrac{5}{\sqrt{27}}X$．これを (3) に代入して $\dfrac{3}{25}\cdot\dfrac{25}{27}X^2+\dfrac{y^2}{9}=1.\ \therefore\ X^2+y^2=9$．よって切り口は半径 3 の円である．面積は 9π．

5．2 (1) $Ax_0x+By_0y+Cz_0z=1$

解説　$f(x,\,y,\,z)=Ax^2+By^2+Cz^2-1$ とすると $f_x=2Ax,\ f_y=2By,\ f_z=2Cz$ だから，接平面の公式

$f_x(x_0,\,y_0,\,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,\,y_0,\,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,\,y_0,\,z_0)(z-z_0)$ より

$2Ax_0(x-x_0)+2By_0(y-y_0)+2Cz_0(z-z_0)=0\ \therefore\ Ax_0x+By_0y+Cz_0z=Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2$．

点 P は曲面 (a) 上の点だから $Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2=1\ \therefore\ Ax_0x+By_0y+Cz_0z=1$．

(2) 単位法線ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{A^2x_0^2+B^2y_0^2+C^2z_0^2}}\begin{pmatrix}Ax_0\\By_0\\Cz_0\end{pmatrix}$，距離 $\dfrac{1}{\sqrt{A^2x_0^2+B^2y_0^2+C^2z_0^2}}$

解説　法線ベクトルは $\begin{pmatrix}Ax_0\\By_0\\Cz_0\end{pmatrix}$．このベクトルの大きさは $\sqrt{A^2x_0^2+B^2y_0^2+C^2z_0^2}$ だから単位法線ベクトルは

$\dfrac{1}{\sqrt{A^2x_0^2+B^2y_0^2+C^2z_0^2}}\begin{pmatrix}Ax_0\\By_0\\Cz_0\end{pmatrix}$

原点から接平面に引いた垂線の足を H とすれば $H(Ax_0t,\,By_0t,\,Cz_0t)$ と表される．

原点からの距離は $OH=t\sqrt{A^2x_0^2+B^2y_0^2+C^2z_0^2}$．$H$ は接平面上の点だから

$Ax_0(Ax_0t)+By_0(By_0t)+Cz_0(Cz_0t)=1\ \therefore\ t=\dfrac{1}{A^2x_0^2+B^2y_0^2+C^2z_0^2}$．

よって距離は $\dfrac{1}{\sqrt{A^2x_0^2+B^2y_0^2+C^2z_0^2}}$

5．3 (1) $(4-a^2)x^2+2ax+y^2=1$

解説　$\begin{cases}z^2=4x^2+y^2\cdots(A)\\ ax+z=1\cdots(B)\end{cases}$．$(B)$ より $z=1-ax$．これを (A) に代入して

$(1-ax)^2=4x^2+y^2\ \therefore\ (4-a^2)x^2+2ax+y^2=1$．

(2) $a=\pm\sqrt{3}$　解説　(1) の曲線が円となるのは $4-a^2=1$ のとき．$\therefore\ a=\pm\sqrt{3}$

(3) $a=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

解説　5．1 と同様に平面 $ax+z=1$ 上に y 軸と垂直な X 軸を設けると $x=\dfrac{X}{\sqrt{1+a^2}}$

$\therefore\ \dfrac{(4-a^2)X^2}{1+a^2}+\dfrac{2aX}{\sqrt{1+a^2}}+y^2=1$．この曲線が円となるのは $\dfrac{4-a^2}{1+a^2}=1$ のとき $\therefore\ a=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

5．4　$y=\dfrac{1}{8}x^2-1$

解説　点 $(0,\,-2,\,2)$ から曲面 $x^2+2y^2+4z^2-8z=0\cdots(1)$ に引いた接線を $\dfrac{x}{l}=\dfrac{y+2}{m}=\dfrac{z-2}{n}\cdots(2)$ とする．

(2) $= t$ とおいて接点を求める．$x = lt,\ y = mt - 2,\ z = nt + 2$ と (1) より

$l^2t^2 + 2(mt-2)^2 + 4(nt+2)^2 - 8(nt+2) = 0 \therefore (l^2 + 2m^2 + 4n^2)t^2 + (-8m + 8n)t + 8 = 0.$

接点は重解だから $D = (-8m + 8n)^2 - 4(l^2 + 2m^2 + 4n^2) \cdot 8 = 0 \therefore l^2 + 4mn + 2n^2 = 0 \cdots (3).$

接線と xy 平面の交点は (2) と $z = 0$ より，$\dfrac{x}{l} = \dfrac{y+2}{m} = -\dfrac{2}{n} \therefore l = -\dfrac{nx}{2},\ m = -\dfrac{n(y+2)}{2}.$

これを (3) に代入すると $\dfrac{n^2x^2}{4} - 2n^2(y+2) + 2n^2 = 0 \therefore \dfrac{x^2}{4} - 2(y+2) + 2 = 0 \therefore y = \dfrac{1}{8}x^2 - 1$