第 5 章

積分法

1　不定積分

1. 1　次の関数の原始関数はどんな関数か.　(1) $\log x$　(63　九州大)

1. 2　次の関数の不定積分を計算せよ.

(1) $\dfrac{2x^2}{x^2-1}$　(55　東農工大)　(2) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$　(55　東農工大)

(3) $\dfrac{x}{x^2-16}$　(57　東農工大)　(4) $x^2\sqrt{1-x^2}$　(59　熊本大)

(5) xe^x　(60　北大)　(6) $\dfrac{1}{x}\log x$　(61　佐賀大)

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}}$　(63　信州大)　(8) $(1+e^x)^{-2}$　(1　千葉大)

(9) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$　(1　佐大)　(10) $\sqrt{x^2-x^3}$　(1　愛媛大)

(11) $\log_a x$　(1　佐大)　(12) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　(1　佐大)

(13) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$　(2　都立大)

1. 3　次の関数の不定積分を計算せよ.

(1) $\tan^4 x sec^2 x$　(54　都立大)　(2) $x\tan^2 x$　(55　都立大)

(3) $e^{3x}\sin 2x$　(57　東農工大)　(4) $e^{-x}\sin x$　(59　佐賀大)

(5) $(\log x)^2$　(59　61　佐賀大)　(6) $e^{-x}\cos x$　(61　佐賀大)

(7) $\dfrac{1}{1-\cos^2 x}$　(57　東農工大)　(8) $e^{ax}\sin bx$　(62　三重大)

(9) $\dfrac{1}{2+\cos x}$　(60　東農工大)　(10) $(\sin x\cos x)^{-1}$　(61　東農工大)

(11) $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$　(63　東商船大)　(12) $x\sin 3x$　(1　佐大)

(13) $x^2\cos x$　(2　都立大)　(14) $x\tan^2 x$　(2　佐賀大)

(15) $x\cos x\sin x$　(2　茨城大)　(16) $x\cos x$　(3　福井大)

1. 4　次の関数の不定積分を計算せよ.

(1) $\sin^{-1} x$　(60　北大)　(2) $\tan^{-1} x$　(62　佐賀大　1　佐大)

(3) $sec^{-1}x$　(1　佐大)

1. 5　次の関数の不定積分を計算せよ.

(1) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2}$　(55　東農工大)　(2) $\dfrac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}$　(59　都立大)

(3) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}}{x-2}$　(1　東農工大)　(4) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$　(63　名工大)

1. 6　次の関数の不定積分を計算せよ.

(1) $\dfrac{5x^2+3x+4}{x^3+x^2+x+1}$ (57　東農工大)　(2) $\dfrac{5}{x^4-3x^2-4}$ (57　東農工大)

(3) $\dfrac{2x+1}{x(x+1)(x+2)}$ (58　都立大)　(4) $\dfrac{2x+1}{x(x-1)(x+2)}$ (59　名工大)

(5) $\dfrac{4x+19}{(x^2+4)(x+1)^2}$ (61　金沢大)　(6) $\dfrac{4x+19}{(x^2+4)(x+1)}$ $T-61$

(7) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ $N-62$　(8) $\dfrac{x^2}{x^4-1}$ (63　信州大)

(9) $\dfrac{x^6}{x^4-1}$ (2　東農工大)　(10) $\dfrac{3x}{x^2-x-2}$ (2　佐賀大)

(11) $\dfrac{x^3-x+4}{(x-1)(x-2)}$ (2　茨城大)

1. 7　$I_n=\displaystyle\int(\log x)^n dx$ とするとき, I_n の漸化式を求め, これを用いて I_4 を計算せよ. (57 理大 (II) 数)

1. 8 (1) $\cot\dfrac{x}{2}=t$ であるとき, $\sin x$, $\cos x$ および $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int(1-\cos x)^{-1}dx$ を求めよ. $N-60$

1. 9　次の I_n についての漸化式を求めよ. (61　東商船大)

(1) $I_n=\displaystyle\int x(\log x)^n dx$ $(n\geqq 1)$

(2) $I_n=\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^{2n}x}$ $(n\geqq 1)$

2　定積分

2. 1　次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^3\sqrt{3-t}\,dt$ (55　群馬大)　(2) $\displaystyle\int_0^t\cos^2 x\,dx$ $T-60$

(3) $\displaystyle\int_0^1(x^2-x+1)^{-1}x\,dx$ (61　東農工大)　(4) $\displaystyle\int_1^2\sin^2\pi x\,dx$ (61　熊本大)

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$ (61　佐賀大)　(6) $\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t}$ (62　図情大)

(7) $\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ (63　九州大)　(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$ (63　図情大)

(9) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$ $N-1$　(10) $\displaystyle\int_0^2\frac{\sqrt[4]{x}}{4+4\sqrt{x}}dx$ (2　九州大)

2. 2　次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\log x\,dx$ (53　東農工大)　(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$ (60　千葉大)

(3) $\displaystyle\int_1^3\log x\,dx$ $N-61$　(4) $\displaystyle\int_0^1 x\sin\frac{\pi x}{2}dx$ (62　九州大)

(5) $\displaystyle\int_0^t x\sin x\,dx$ $T-62$　(6) $\displaystyle\int_0^2 xe^{\frac{x}{2}}dx$ $T-63$

(7) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$ $T-1$

2. 3　次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-\cos x)^{-1}dx$ (58　東農工大)　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{3+\tan x}$ (63　信州大)

2. 4　積分 $\displaystyle\int_0^\pi\frac{x\sin x\,dx}{a^2+\cos^2 x}$ の値を求めよ. (53　山梨大)

2. 5　積分 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$ の値を求めよ. (61　東商船大)

2. 6　次の積分で表されている関数を ( ) の変数で微分せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt \qquad (x)$ 　　$N-59$　　(2) $\displaystyle\int_0^t f(t,x)dx \qquad (t)$　　(62　北大)

(3) $\displaystyle\int_{kx}^{x^2-kx} f(kt)dt \qquad (x)$　　(63　東大)

2. 7　区間 $[a,\,b]$ で $f(x), g(x)$ が連続ならば,

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqq \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$$

が成立することを証明せよ．また, 等号はどんなときに成立するか.　(46　信州大)

2. 8　$f(x)$ は x の連続関数で, 定数 $a>0$ に対し, $f(x)=f\left(\dfrac{a}{x}\right)$ であるとき,

$$\int_1^a \frac{f(x)dx}{x} = 2\int_1^{\sqrt{a}} \frac{f(x)dx}{x}$$ を証明せよ.　(55　岩手大)

2. 9　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n dx}{x^4+4x^2+3}$ $(n=0,\,1,\,2,\,3)$ を求めよ.　(58　東北大)

2. 10　$P(x)$ が 3 次の整式であるとき,

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{(b-a)\{P(a)+P(b)+4P\left(\frac{a+b}{2}\right)\}}{6}$$

であることを示せ.　(59　図情大)

2. 11　関数 $f(x)$ は 2 回微分可能で $f''(x)$ は連続であり, $f(0)=f'(0)=0$ とする．このとき, 次の (1), (2) に答えよ.

(1) $f(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)f''(t)dt$ であることを示せ.

(2) $|f''(x)|\leqq x\ (0<x)$ ならば, $|f(x)|\leqq \dfrac{x^3}{3!}$ であることを示せ.　(63　鹿大)

2. 12 (1) $y=x\sin x$ のグラフの概形を書け．ただし, $-2\pi\leqq x\leqq 2\pi$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ を求めよ.

2. 13　次式を証明せよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)d\theta = \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$　(1　愛媛大)

2. 14　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos 3\theta(\cos\theta+\sin\theta)d\theta$ を求めよ.　(3　福井大)

3　パラメータを含む定積分

3. 1　$f_n(x)=\begin{cases} 0 & |x|\geqq \dfrac{1}{n} \\ n(1-n|x|) & |x|\leqq \dfrac{1}{n} \end{cases}$

(1) $n=1$ のときのグラフを書け.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ.

(3) $F_n(k)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)e^{-kx}dx$ を求めよ.　$N-53$

3. 2　次の関数のグラフを書け.　$y(x)=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos\theta}{\sqrt{x^2+2x\sin\theta+1}}d\theta$　(57　千葉大)

3. 3　$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & \left(0\leqq x\leqq \dfrac{1}{n}\right) \\ 2n-n^2x & \left(\dfrac{1}{n}\leqq x\leqq \dfrac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(x<0,\ \dfrac{2}{n}<x\right) \end{cases}$　について次の問に答えよ.

(1) $y=f_n(x)$ のグラフを書け.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$ を示せ.　(59　電通大)

3. 4　$f_n(x) = \begin{cases} n(n-1)x & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}\right) \\ 2(n-1) - n(n-1)x & \left(\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{2}{n} \leqq x \leqq 1\right) \end{cases}$　とするとき,

(1) $I = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)$ を求めよ.

(2) $J = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx$ を求めよ.　(59　金沢大)

3. 5　m, n が自然数であるとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx$　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx$　(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx$　(1　長崎大)

3. 6　$P_m(x) = \dfrac{1}{2^m m!}\{(x^2-1)^m\}^{(m)}$ とするとき, 次の積分の値を求めよ.　$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$　(1　長崎大)

3. 7　m, n が自然数または 0 であるとき, 次の積分を求めよ.　$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x\cos(m-n)xdx$　(1　佐賀大)

3. 8 (1) $f(\alpha) = \int_0^1 |x^2 - \alpha^2|dx$ を計算せよ.

(2) $f(\alpha) = \dfrac{1}{4}$ のとき, α の値を求めよ.　$T-2$

4　漸化式による定積分

4. 1　次の積分の値を求めよ.　$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$　(61　徳島大, 2　名大)

4. 2　次の値を求めよ.　(50　電通大)

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k xdx$　(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right]^2$

4. 3　$I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ なるとき, 漸化式 $I_{m,n} = \dfrac{nI_{m,n-1}}{m+n+1}$ を導け. ただし, m, n は正の整数とする.　(56　北大)

4. 4　$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$ とするとき, 次の問に答えよ. ただし, n は正の整数である.

(1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$ を示せ.　(2) I_2 を求めよ.

(3) I_n を用いて I_{n+2} を示せ.　(4) I_n を求めよ.　(57　東北大)

4. 5　$I_n = \int_1^e (\log x)^n dx$($n$ は自然数) とする.

(1) I_1 を求めよ.

(2) $I_n = e - nI_{n-1}$　$(n \geqq 2)$ を示せ.

(3) (1)(2) の結果を用いて I_4 を求めよ.　(62　東商船大)

4. 6　$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n xdx$ とすると, $I_n = \dfrac{1}{n-1} - I_{n-2}$ が成立することを証明せよ. また, I_n はどうなるか.(2　山口大)

4. 7　$\int_0^1 (\log x)^n dx$ を求めよ.　(3　名大)

5　広義積分

5. 1　次の積分の値を求めよ.

(1) $\int_0^{\infty} \dfrac{dx}{x^a}$　$(a > 0)$　(56　電通大, 61　徳島大)　(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{e^x + 4e^{-x} + 5}$　(56　電通大)

(3) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$　(57　徳島大)　(4) $\int_0^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{e^x - 1}}$　(57　熊本大)

(5) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}dx$ (59　東農工大)　(6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ (60　東商船大)

(7) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ (61　佐賀大)　(8) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ (62　東商船大)

(9) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}dx \quad (a>0)$ (62　図情大)　(10) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$ (62, 63　東商船大, 63　図情大)

(11) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-2x}dx$ $N-63$　(12) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\log(1+a^2x^2)dx$ (1　山口大)

5. 2　次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})dx$ (59　佐賀大)　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (62　図情大)

(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2xdx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (62　図情大)　(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ (63　信州大)

5. 3　次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ (56　東農工大)　(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ (62　東農工大)

5. 4　$\displaystyle I_{MN}=\int_0^1 x^N(\log x)^M dx$ を求めよ. (51　東農工大)

5. 5　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}|\sin x|dx$ は収束するか発散するか調べよ. もし収束するならその値を求めよ. (58　金沢大)

5. 6　$y=e^{-ax}\quad (a>0)$ において

(1) グラフの概形を書け.

(2) 曲線上の点 P より x 軸に下ろした垂線の足を Q, 点 P における接線と x 軸との交点を R とするとき, QR の長さを求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}dx,\ \int_0^\infty xe^{-ax}dx$ を求めよ. (60　東北大)

5. 7　$\displaystyle I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}dx$ がある. 次のものを求めよ.

(1) I_1　(2) $I_{2n+1}-I_{2n-1}$　(3) $I_{2n+2}-I_{2n}$　(4) I_{2n-1} (61　東北大)

5. 8　積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx$ を求めよ. ただし, n は自然数. (62　電通大)

5. 9　関数 $f(x)$ が $[0,\,1]$ で連続であるとき, 次の式を証明せよ.　$\displaystyle\int_0^\pi f(\sin\theta)d\theta = 2\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ (2　愛媛大)

6　特殊関数

6. 1　$\displaystyle\int_0^1 t^m(1-t)^n dt = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ であることを示せ. ただし, m, n は正整数である. (59　千葉大)

6. 2　$s>0$ とし, $\displaystyle\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ とおくとき, 次の問に答えよ.

(1) $s>1$ とすれば, $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ が成り立つことを証明せよ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \alpha e^{-0.5t}t^{s-1}dt=1$ であるときの, α を求めよ. (61　東工大)

6. 3　$\displaystyle J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta$ のとき,

$$xJ_{n+1}(x)-2nJ_n(x)+xJ_{n-1}(x)=0$$

が成立することを示せ. ただし, n は整数とする.

ヒント　$f(\theta)=(\sin(n\theta-x\sin\theta))'$ と置き, 右辺の微分を実行した後, 両辺を θ について 0 から π まで積分してみよ.

(63　千葉大)

6. 4　$s>0$ とし, $\displaystyle\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ とおくとき, 次の問に答えよ.

(1) $s>1$ とすれば, $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ が成り立つことを証明せよ.

(2) $\Gamma(5)$ を求めよ. (1　名大)

6. 5　m, n は自然数で, $0 \leqq p \leqq 1$ であるとき, 次の関係が成り立つことを証明せよ.

$$p^{m+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\dbinom{n}{k}}{\dbinom{m+n}{k}}(1-p)^{n-k}=(m+n+1)\int_0^p x^m(1-x)^n dx$$ (1　阪大基)

7　積分の応用 (最大 · 最小)

7. 1　空間座標で t を助変数として $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\dfrac{ht}{2}\pi$ で与えられる曲線が $\pi ah=c$(定数) の関係をもつとき,

(1) $0\leqq t\leqq 2\pi$ のときの弧の長さの最小値を c で表せ.

(2) このときの a と h の関係を求めよ. (56　東大)

7. 2　実数 x, y について $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}(x\cos\theta+y\sin\theta-\theta)^2d\theta$ を定義するとき, I を最小にする x, y を求めよ. また, このときの I の値を求めよ. (57　東北大)

7. 3　x の関数 $G(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}e^{-t}\sin t dt$ の最大値, 最小値を求めよ. ただし, x はすべての実数の範囲を動くものとする. $N-59$

7. 4　$f(t)=\begin{cases}e^{-t} & (t\geqq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $t+s\geqq 0$ で $0<t<1$ の領域を $(s,\,t)$ 平面に図示せよ.

(2) $g(s)=\displaystyle\int_0^1 e^{2t}f(t+s)dt$ とするとき, これを, $s<-1$, $-1\leqq s\leqq 0$, $0<s$ の場合に分けて計算せよ.

(3) $g(s)$ の最小値とそのときの s の値を求めよ. (62　九州大)

7. 5　半径が 1 である球に内接する円柱で体積が最大になるときの体積を求めよ. (2　愛媛大)

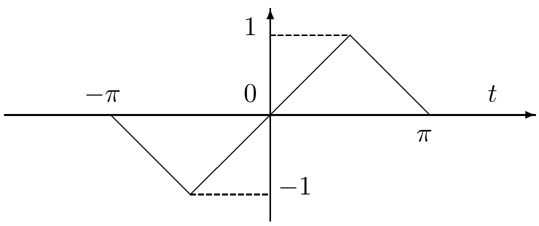
8　積分の応用 (図形)

8. 1　$f(t)$ は図のような関数とする. これを関数

$g(t)=a\sin t+b\sin 2t$

で近似するとき, 誤差 E が最小になるような a, b を求めよ. また, そのときの E も求めよ. ただし,

$$E=\frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(t)-g(t)\}^2dt}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(t)\}^2dt}$$



(54　東大)

8. 2　$f(x)=e^{-x}\sin x$ について, 次の問に答えよ.

(1) $k\pi\leqq x\leqq(k+1)\pi$ における面積 S_k はいくらか.

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}S_k$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}S_k$ を求めよ.

(4) $\left\{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}S_k\right\}\times 0.99\leqq\displaystyle\sum_{k=0}^{n}S_k$ をみたす最小の n を求めよ. (55　北大)

8. 3　$y_1=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $y_2=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 二つの曲線のグラフを書け.

(2) 直線 $x=1$, $x=a$ によって囲まれる部分の面積を求めよ. (56　山梨大)

8. 4　サイクロイド $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$　$(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と x 軸とで挟まれた部分の面積を求めよ.

(57　大阪府大, 62　東農工大)

8. 5　(a) 曲線 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ の極値, 変曲点, 漸近線を求めて, そのグラフをかけ.

(b) この曲線と $x^2=2y$ とによって囲まれた図形の面積を求めよ. (58 図情大)

8. 6 次の問に答えよ.

(1) 変数 ξ, η が $0 \leqq \xi \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $-1 \leqq \eta \leqq 1$ の範囲で変わるとき, 極座標で表された点 $P(r, \theta)$

$$r=\left\{\frac{a(1-\eta)}{2}+\frac{3a(1+\eta)}{2}-2a\right\}\cos\xi+2a$$
$$\theta=\xi$$

の存在する領域の概形を示せ. ただし, a は正の定数である.

(2) 上の領域の面積を求めよ. $T-59$

8. 7 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸, y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ. (60 山口大)

8. 8 $t\,(0 \leqq t \leqq \pi)$ を媒介変数とする方程式

$$x=1-e^{-t},\ y=\sin^{2n} t \quad (n:\text{自然数})$$

で表される平面上の曲線 C_n と x 軸とで囲まれる部分の面積を S_n とするとき, 次の問に答えよ.

(1) S_{n-1} と S_n の関係式を求めよ.

(2) S_n を求めよ. (61 九州大)

8. 9 $2x^2+2xy+y^2=1$ について, 次の問に答えよ.

(1) y', y'' を求めよ.

(2) この曲線で囲まれる部分の面積を求めよ. (62 電通大)

8. 10 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ. (63 東農工大)

8. 11 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ の表す図形の面積を求めよ. (63 愛媛大)

8. 12 $r=a(1+\cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ a>0:\text{定数})$ で囲まれる領域の面積を求めよ. (63 徳島大)

8. 13 関数 $y=xe^{x^2}$ について

(1) $(1, e)$ における接線の方程式を求めよ.

(2) $y=xe^{x^2}$ と (1) で求めた接線と x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ. (1 徳島大)

9 積分の応用 (長さ)

9. 1 星芒形 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ の一周の長さを計算せよ. (47 金沢大)

9. 2 $x=t^2$, $y=t-\dfrac{t^3}{3}$ で定義される曲線について

(1) 曲線の概形を描け.

(2) この曲線の閉曲線をなす部分について, その全長を求めよ. $N-53$

9. 3 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ は一つの閉曲線である.

(1) この曲線の概形を書け.

(2) この曲線で囲まれる面積を求めよ.

(3) この曲線の長さを求めよ. (55 57 北大)

9. 4 xy 平面上に, a を正の定数として, 次式で表される曲線がある.

$$x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

この曲線に関して, 次の問に答えよ.

(1) この曲線の xy 平面上での方程式を求め, そのグラフの概略を書け.

(2) x 軸および y 軸とこの曲線との交点をそれぞれ A および B とするとき, 曲線の長さ AB を求めよ.

(3) この曲線と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(4) $x=\dfrac{a}{2}$ におけるこの曲線の接線の方程式を求めよ. (58 北大)

10 積分の応用 (回転体)

10. 1 サイクロイド $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ を x 軸の回りに回転してできる回転体の体積を求

めよ.　(49　秋田大　60　佐賀大)

10. 2　第一象限において円 $x^2+y^2=4$ と双曲線 $xy=1$ とによって囲まれる図形を x 軸の回りに回転させてできる回転体の体積を求めよ.　(59　北大)

10. 3　サイクロイド曲線について答えよ.

(1) $x=r(\theta-\sin\theta)$, $y=r(1-\cos\theta)$ を証明せよ.

(2) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲の曲線の長さを求めよ.

(3) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲の回転体の体積を求めよ.　(2　阪大工)

11　区分求積法

11. 1　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$ を求めよ.　(60　広島大)

11. 2 (1) $\displaystyle\log 2+\log 3+\cdots+\log(n-1) < \int_1^n \log x dx < \log 2+\cdots+\log n$ をグラフを使って解け.

(2) $n\log n-n+1 < \log n! < (n+1)\log n - n + 1$ を証明せよ.　(58　山口大)

11. 3　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$ が 0 と 1 の間の数であることを示せ. ただし, $\displaystyle\log n=\int_1^n\frac{1}{x}dx$ を用いよ.
(59　千葉大)

11. 4　次式が成り立つことを定積分の定義に基づいて示し, (1), (2) の値を求めよ.　(62　都立大)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{f\left(\dfrac{i}{n}\right)}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right\}$

11. 5　$a_n=\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ とすると

$$\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log x dx < \log a_n < \int_{\frac{1}{n}}^{1}\log x dx$$

が成立している.

(1) 上式が成り立つことを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n$ を求めよ.

(3) $n^ne^{-n+1} < n! < n^{n+1}e^{-n+1}$ となることを示せ.　(1　阪大工)

12　積分の応用 (物理)

12. 1　曲線 $y=\dfrac{1}{x}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ と直線 $y=x$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ で囲まれる部分を y 軸の回りに回転してできる容器を考える. この容器に水を 1 秒当たり 1 単位体積ずつ入れてゆく.

(1) t 秒後の高さ $H(t)$ を求めよ.

(2) 水面の上昇速度 $H'(t)$ を求めよ.　(55　東工大)

13　積分の総合問題

13. 1　$y=\sin^{-1}x$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ について

(1) グラフを書け.

(2) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを証明せよ.

(3) $(1-x^2)y'''-3xy''-y'=0$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\int \sin^{-1} x dx$ を部分積分法によって求めよ. $T-54$

13. 2　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において

(1) 傾き m の接線の方程式 $y=mx+c$ の c を $a,\ b,\ m$ の式で表せ.

(2) 直交する 2 接線の交点の軌跡を求めよ.

(3) 楕円に外接する長方形の最大面積を求めよ. (55　東大)

13. 3　$x=0$ のときは $f(x)=1,\ x>0$ のときは $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ なる関数に対して

$$a_n=(-1)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおいたとき, 次の事項を証明せよ.

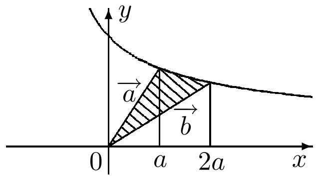
(1) $0<a_n<\dfrac{1}{n-1}$

(2) $a_1>a_2>a_3>\cdots$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ の値が存在する. (58　電通大)

13. 4　微分における平均値の定理および積分における平均値の定理について説明せよ. (58　佐賀大)

13. 5　関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ がある.



(1) 右図において $\vec{a},\ \vec{b}$ を $\vec{i},\ \vec{j}$ を用いて表せ. また内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ.

(2) $x=a$ における接線の方程式を求めよ. また原点から接線に至る距離を求めよ.

(3) 図の斜線の部分を x 軸を中心として回転したときの回転体の体積を求める式とその値を求めよ.

13. 6　半径 a の半円の重心を求めよ. (3　福井大)

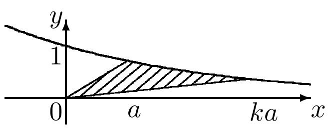
13. 7　$y=e^{-\frac{x}{k}}$　$(k>1)$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $x=a$ における接線を求めよ.

(2) (1) で求めた接線と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積を求めよ.

(3) (2) で求めた面積で $a\to\infty$ のときの値を求めよ.

(4) 下図の斜線の部分を x 軸のまわりに回転したときの体積を求めよ. (3　福井大)



13. 8 (1) $y=f(x)$ において第 1 象限の点 $(x_1,\ f(x_1))$ における接線が $(ax_1,\ 0)$　$(a<1)$ を通る. $f(x)$ の微分方程式をつくれ.

(2) (1) で求めた微分方程式を解け.