第 8 章

関数方程式

1　1 階微分方程式

1. 1　次の微分方程式を解け.

(1) $y' = \dfrac{y}{x(x+1)(x+2)}, \quad y(1) = 1$　(57　図情大)　(2) $y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$　(58　東北大)

(3) $y' = y\cos x$　$N-61$　(4) $e^{x+y} + e^{2x-y}y' = 0$　(1　佐賀大)

1. 2　次の微分方程式を解け.

(1) $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$　(52　電通大)　(2) $y' = \dfrac{2y - x}{x}$　(57　秋田大)

(3) $x + xy' = ky$　(58　都立大)　(4) $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}$　(62　広島大)

(5) $(x^2 + y^2)dx = xydy$　$T-1$

1. 3　次の微分方程式を解け.

(1) $y' - 2y = e^x$　(61　東大)　(2) $y' + \dfrac{y}{x} = \log x$　(62　徳島大)

(3) $y' - y\tan x = \sin x$　$N-62$　(4) $(1+x^2)y' = xy + 1$　(63　徳島大)

(5) $y' + xy = x$　(1　東農工大)　(6) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = \dfrac{3}{2}$　(2　千葉大)

(7) $y' + 3y = x^2 + 1$　(2　北大)

1. 4　次の微分方程式を解け.

(1) $(x+y)dx = ydy$　(57　大阪府大)　(2) $y' = (x+y)^2$　(2　名大)

(3) $dx - ydy = x^2yd\alpha$　(3　福井大)

1. 5　微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$ において, 未知数 y の変換 $z = y^{1-n}$ を行えば, z を未知数とする線形微分方程式になることを示せ. これを用いて, 次の各微分方程式を解け.

(1) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^2$　(55　都立大)　(2) $y' + \dfrac{y}{x} = -\dfrac{x^2y^3}{2}$　$N-56$

(3) $y' - \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$　(56　都立大)　(4) $y' = y(1+xy)$　(57　理科大 (II) 数)

(5) $y' - \dfrac{y}{x-1} + y^2 = 0$　(58　都立大)

1. 6　微分方程式 $y' + y(y-1) = 0$ において

(1) この方程式の一般解を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 ydx = y_0$ の条件を満たす解を求めよ.　(51　東農工大)

1. 7　微分方程式 $y' + y = f(t)$ において, 次の問に答えよ.

(1) $f(t) = 0$ のときの一般解を求めよ.

(2) $f(t) = \cos\omega t$ のとき, $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ とおくことによって特殊解を求めよ.

(3) この方程式の一般解を求めよ.

(4) $f(t) = \cos t + \cos 3t$ のときの特殊解を $\sin t$ と $\cos t$ の和で示せ.　(56　三重大)

1. 8　$y' = \dfrac{1}{\log(2x+y+3)} - 2$ の一般解を求めよ.　(57　東農工大)

1. 9　微分方程式 $(p^2+1)^2 - (px-y)^2 = 0 \quad (p = y')$ を解け.　(57　東大)

1. 10　x の関数 $y(x)$ の導関数 $y'(x)$ が x によらず次式を満たすとき, 以下の問に答えよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x^2 & 2x & 2 \\ 2x^2 & 1 & x & x^2 \\ 2x & x & y' & x \\ 2 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(1) $y' = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$ であることを示せ.　(2) y を求めよ.　$T-57$

1. 11　$x' = -kx$ と初期条件 $x(0) = 2$ がある. $J(k) = \displaystyle\int_0^\infty (1+k^2)xdt$ で, $J(k)$ を最小にするには, k をいくらにしたらよいか. また, そのときの k に対して $x(t)$ のグラフの概略をかけ.　(58　東大)

1. 12　微分方程式 (a)　$\dfrac{dy}{dx} = (4x+y+2)^2$ について, 次の問に答えよ.

(1) $4x+y+2 = u$ とおき, (a) を u に燗する微分方程式に変換せよ.

(2) (1) の変換を利用して, (a) の一般解を求めよ.

(3) $x = 0$ のとき, $y = 0$ であるような (a) の解を求めよ.　$N-60$

1. 13　$y = A\sin mx + B\cos mx$ から A, B を消去して微分方程式を作れ.　$T-62$

1. 14　微分方程式 $xy' = 2y - x$ がある.

(1) $y = xu$ とおき, u の方程式に直せ.

(2) さらに $x = e^t$ とおけば, 方程式はどんな形になるか.

(3) $x = 3$ で $y = 0$ になる条件を満たす与式の解を求めよ.　(63　九州大)

1. 15　一階常微分方程式 $dx + xydy = y^2dx + ydy$ を dx, dy で整理し, 解曲線が閉曲線となるような解を示せ.

(63　千葉大)

1. 16　$y = y(x)$ が $y' = f(x, y)$ を満たすとき, y'', y''' を $f(x, y)$ またはその導関数で表せ.　(1　金沢大)

1.17　$y' = y^2 - 1$, $y(0) = c$ なる微分方程式の解を, c を -1, 0, 1, 2 と変化させたときに対応してそれぞれを求めよ.

(1　九大)

1. 18　$y' + xy = x^2 - x + 1$ のとき, 特殊解が 2 次以下となることを証明せよ.　(2　都立科技大)

1. 19　$2x^2y' - x^2y^2 + 2xy + 1 = 0$ について,

(1) $u = xy$ とおいて, 与式を u の関数で表せ.

(2) (1) の結果を用いて, 与式を解け.　$N-2$

2　定係数の線形微分方程式 (1)

2. 1　次の微分方程式を解け.

(1) $y''' - 3y'' + 4y' - 12y = 0$　(57　千葉大)　(2) $a^2y^{(4)} = y''$　(59　都立大)

(3) $y''' + y'' + 4y = 0$　(59　岩手大)　(4) $y'' - y' - 2y = 0$　$T-60$, $N-62$

(5) $y'' - 5y' + 5y = 0$　$N-61$　(6) $y'' + 2y' - 3y = 0$　$N-62$

2. 2　次の微分方程式を初期条件のもとで解け.

(1) $y''' - y = 0$,　$y(\infty) = 0$　(55　千葉大)

(2) $x'' + 3x' + 2x = 0$,　$x(0) = 1$, $x''(0) = 2$　(63　千葉大)

(3) $y'' - 2ay' + a^2 = 0$,　$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$　(63　東大)

(4) $y'' + 3y' + 2y = 0$,　$y(0) = 1$, $y''(0) = 1$　(2　千葉大)

2. 3　次の微分方程式について, 次の問に答えよ.

(1) $y'' + k^2y = 0$ を解け.

(2) 3 つの条件 $x = 0$ のとき, $y = 0$, $y' = k$ で, $x = 1$ のとき値 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が与えられている. この場合に (1) の与式が恒常的に 0 でない k の値を求めよ.　$T-56$

2. 4　微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を初期条件 $y(0) = \sqrt{3}$, $y'(0) = -\sqrt{3} - 2$ のもとで解き, 解曲線の概形を描け.

(60　電通大)

2. 5 $y'' + y = 0$ と条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ のときの $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ. $T-63$

3 定係数の線形微分方程式 (2)

3. 1 微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = x$ の特殊解を求めよ. (57 千葉大)

3. 2 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' + y' - y = xe^{2x}$ (54 都立大) (2) $(D^2 - 2D + 2)y = x^2 + 1$ $N-55$

(3) $y'' + y = e^x$ (57 理科大 (II) 数) (4) $y'' + 2y' + 3y = x$ (57 徳島大)

(5) $2y'' + 4y' + y = e^{-2x}$ (58 徳島大) (6) $y'' + y' + y = e^x$ (59 千葉大)

(7) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$ (59 佐賀大) (8) $y'' + 4y' + 13y = 9e^{4x}$ (60 東農工大)

(9) $y'' - 6y' + 8y = e^x$ (62 徳島大) (10) $y'' - y' - 2y = x + 1$ $N-62$

(11) $y'' - y' - 2y = x^2 + x$ (2 熊本大) (12) $y'' + y = e^x + 1$ (2 佐賀大)

(13) $y'' + 4y' + 13y = x$ (3 三重大)

3. 3 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' + y' - 6y = \sin x$ (50 電通大) (2) $y'' + y' + 2y = \sin x$ $N-54$

(3) $y'' - 2y' + 5y = \sin x$ (55 東工大) (4) $y'' - 2y' + y = 4\sin x$ (57 埼玉大)

(5) $y'' - 5y' + 4y = \dfrac{\cos nx}{n^2}$ (60 東工大) (6) $y'' + 2y' + 5y = \sin x$ (60 電通大)

(7) $y'' + 3y' + 2y = \cos x$ (61 徳島大)

3. 4 微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = e^{-x}\cos x$ の一般解を求めよ. $N-58$

3. 5 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' - 3y' + 2y = e^x$ (56 東工大) (2) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$ (59 東工大)

(3) $y'' + y' - 2y = e^x$ (61 佐賀大) (4) $y'' - 5y' + 6y = e^x$ (61 大分大)

(5) $y'' + 2y' - 3y = e^x$ $N-62$ (6) $y'' + 2y' - 8y = e^{2x}$ (62 東農工大)

(7) $y'' - 2y' - 8y = e^{-2x}$ (62 東農工大)

3. 6 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' - 3y' + 2y = x + e^{2x}\cos x$ (56 千葉大) (2) $y'' - 3y' + 2y = x^2 + e^x \sin x$ (59 東工大)

(3) $y'' - 2y' + 3y = 3\sin x - \cos x$ (60 東工大) (4) $x'' - x' - 2x = e^{2t} + \sin t$ (1 東工大)

3. 7 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 3e^{2x}$ (52 東工大) (2) $y''' + 2y'' - 3y' = x^2 e^{-x} + e^x \sin 2x$ (56 東工大)

(3) $y''' - 4y'' + 4y' = e^{2x}$ (56 東工大) (4) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 3e^{2x}$ (63 東工大)

3. 8 次の微分方程式を初期条件のもとで解け.

(1) $y''' - y = 0, \quad y(\infty) = 0$ (55 千葉大)

(2) $x'' + 3x' + 2x = 1, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ (62 九州大)

(3) $y'' + 3y' + 2y = 2, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ (63 千葉大)

(4) $u'' - u = e^{2t}, \quad u(0) = a,\ u'(0) = b$ (1 都立科技大)

(5) $y'' + k^2 y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2k$ (3 北大)

3. 9 $(D - \alpha)(D^2 + 2\zeta D + 1)y = e^{\beta x}$ $(\alpha,\ \beta,\ \zeta$ は実数, $0 < \zeta < 1)$ を解け. ただし, D は x の積分演算子である.
(51 東大)

3. 10 微分方程式 $y'' + (\alpha - 2)y' + \alpha y = 0$ について

(1) α にかかわらず $x \to \infty$ のとき, $y \to 0$ となる α の範囲を求めよ.

(2) $\alpha = 2$ のとき, $x = 0$ で $y = 1,\ y' = \sqrt{2}$ となる解の概形を求めよ. (56 東大)

3. 11 $y'' + y = \sin ax$ について

(1) 一般解を求めよ.

(2) $a = 1$ のときの特殊解を求めよ. (60 千葉大)

3. 12 微分方程式 $y'' - y = -2\sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ において $y = e^x u + \sin x$ とおいて, u の満たす方程式を求め, 微分方程式を解け. (62 横浜国大)

3. 13　微分方程式 $y'' - 4y' + y = e^{-x}\log x \cdots (X)$ がある.

(1) $y = e^{-x}z$ とおいて, z の微分方程式を求めよ.

(2) (1) の微分方程式の解 z を求めよ.

(3) 方程式 (X) の解を求めよ. $N-63$

4　2 階微分方程式

4. 1　微分方程式 $(1-x^2)y'' + xy' = ax$ の一般解を求めよ. (61　東工大)

4. 2　微分方程式 $x^2y'' + Pxy' + Qy = 0$ において, $x = e^t$ とおくと, $y'' + (P-1)y' + Qy = 0$ と直せることを示せ. さらに次の微分方程式を解け.

(1) $xy'' + 3xy' - 3y = 3\log x - 2$ (50　岡大)　(2) $x^2y'' + xy' + y = 0$ (57　大阪府大)

(3) $x^2y'' + xy' + y = \log x$ $N-57$　(4) $x^2y'' + 3xy' + y = x$ $T-61$

(5) $x^2y'' + xy' + y = x$ (1　徳島大)　(6) $xy'' + y' = 0$ $N-1$

4. 3　次の微分方程式を解け.

(1) $yy'' + (y')^2 = a^2$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$ (54　東大)

(2) $yy'' + 2(y')^2 - 2yy' = 0$ (63　京大, 1　東大)

(3) $yy'' + (y')^2 = 0$ (1　佐賀大)

4. 4　微分方程式 $x^2y'' + xy' - 4y = 0 \quad (x > 0)$ について, 下の問に答えよ.

(1) $f(x) = x^{-2}$ のとき, $y = f(x)$ は解となることを示せ.

(2) $g(x) = 4x^{-2}\displaystyle\int x^4 e^{-\log x}dx$ を解いて, $y = g(x)$ は解となることを示せ.

(3) (1)(2) の結果から $f(x)$, $g(x)$ が一次独立であることを証明せよ. (59　九州工大)

4. 5　微分方程式 (a)　$x^2(x+1)y'' - 2x^2y' + 2(x-1)y = 0$ について, 次の問に答えよ.

(1) $y = x^n$ が微分方程式 (a) の解になるように, n の値を求めよ.

(2) (1) で定めた n に対して, $y = x^n u(x)$ とおく. y が微分方程式 (a) を満たすためには, 関数 $u = u(x)$ はどんな微分方程式を満たさなければならないか. その微分方程式を求めよ.

(3) 微分方程式 (a) の一般解を求めよ. $N-59$

4. 6　2 階常微分方程式 $y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$ において独立変数 x を $t = \Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \exp\left(-\int_0^x P(x)dx\right)dx$ に変換すれば t に関する 1 階微分を含まない 2 階常微分方程式が得られる. このことを利用して次の微分方程式の一般解を求めよ.

$y''(x) + (\tan x)y'(x) + (\cos^2 x)y(x) = 0$

4. 7　関数 $f(x)$ が微分方程式 $\dfrac{d^2f}{dx^2} + (2x-a)\dfrac{df}{dx} + (x^2 - ax + 1)f = 0$ を満たしているとき, 次の問に答えよ.

(1) $f(x) = e - \dfrac{1}{2}x^2 g(x)$ とおき, $g(x)$ が満足すべき微分方程式を求めよ.

(2) b を定数, h を関数とし, 微分方程式 $\dfrac{dh}{dx} - bh = 0$ を解き, (1) で求めた微分方程式の一般解を求めよ.

(3) $f(0) = 1$, $f'(0) = a$ の条件で $f(x)$ の最大値を求めよ. (2　東北大)

4. 8　微分方程式 $2x^2\dfrac{dy}{dx} - x^2y^2 + 2xy + 1 = 0$ について次の問に答えよ.

(1) $u = xy$ とおいて u に関する微分方程式に変換せよ.

(2) 前問を利用して最初の微分方程式を解け. $N-2$

5　微分方程式の応用 (図形)

5. 1　xy 平面上に方程式 $y = f(x)$ で表される曲線がある. この曲線上の任意の点 P における接線が y 軸と交わる点を Q とすると, P と Q の中点は常に x 軸上にある. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $y = f(x)$ の満足する微分方程式を導け.

(2) この曲線が点 (2, 1) を通るものとして, 曲線の方程式を求めよ. (53　東北大)

5. 2 xy 平面で曲線 $y = y(x) \geqq 0$ の任意の弧と縦線と x 軸で囲まれた部分の面積がつねにその弧長に比例しているとき, その曲線の方程式を求めよ. ただし, 比例定数を $k > 0$ とし, $y(0) = k$ とする. (55 東北大)

5. 3 xy 平面上に曲線がある. この曲線上の任意の点 $P(x, y)$ について, 次の条件 (c) が成立するとき, この曲線の方程式を求めよ. ただし, $x > 0$ とする.

(c) 点 $P(x, y)$ におけるこの接線が y 軸と交わる点の y 座標の値が, 点 P の x 座標に等しい. $T-59$

5. 4 xy 平面上の直線 $y = ax + b$ は, 2 点 $(1, 0)$ および $(-1, 0)$ から下ろした垂線の長さの積が $k(k > 0)$ に等しい直線である. 次の問に答えよ.

(1) b を a と k で表せ.

(2) $k = 1$ のとき, a を変えて得られるすべての直線に接する曲線, すなわち, この直線群の包絡線は 2 次曲線である. この 2 次曲線の式を求めよ. (58 東北大)

5. 5 法線が点 (a, b) を通る平面上の曲線を求めよ. (58 徳島大)

5. 6 ある関数 $y = f(x)$ があって, この曲線上の点 P での接線が, x 軸, y 軸と交わる点を Q, R とするとき, P は QR の中点とする.

(1) $y = f(x)$ が満たす微分方程式を求めよ.

(2) $y = f(x)$ が $(\sqrt{3}, \sqrt{7})$ を通るものとして, この微分方程式を解け.

(3) $\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{10}$ の範囲で, この曲線が x 軸を軸として回転してできる立体の表面積を求めよ. (59 東北大)

5. 7 $y^2 = 4Cx$ について, 次の問に答えよ.

(1) $C = \pm 1$, $C = \pm 2$, $C = \pm 3$ のグラフを書け.

(2) C を消去して微分方程式を作れ.

(3) (1) のグラフに直行する曲線の方程式を求め, グラフを描け. (59 山口大)

5. 8 曲線群 $y^2 = cx$ の直交截線を求めよ. (60 東大)

5. 9 ある曲線上の点 P における接線が x 軸と交わる点を Q とすると, PQ がつねに長さ a であるような曲線を求めよ. (61 東農工大)

5. 10 平面での曲線上の任意の点 P における接線が直線 OP (O : 原点) を原点を中心として 30° 回転したものに平行である. 次の問に答えよ.

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 (x, y) で表すとき, 曲線 C の満たす微分方程式を求めよ.

(2) (1) の微分方程式を極座標 (r, θ) で表せ.

(3) 曲線 C が直交座標の点 $(0, 1)$ を通るとき, 曲線 C の方程式を求めよ. (61 九州大)

5. 11(1) $f(x)$ がある. ある点を $f(x)$ 上にとる. そこから x 軸へ下ろした垂線が x 軸と交わる点を H とする. また, 点 P を通る $f(x)$ の法線が x 軸と交わる点を Q とする. $QH = a$ で一定のとき, $f(x)$ を求めよ.

(2) $(1, 0)$ を通るとき, $f(x)$ を求めよ. (61 東北大)

5. 12 c をパラメータとして $x^2 + y^2 = cx$ で与えられる曲線族を考える.

(1) この曲線族を一般解としてもつ微分方程式を作れ.

(2) この曲線族に直交する曲線を求めよ. (63 名工大)

5. 13 (1) ある曲線 C 上の点 (x_0, y_0) における接線の傾きを a とする. そのときの接線の方程式を求めよ.

(2) 曲線 C の任意の点における接線は必ず $(1, 2)$ を通るという. 曲線 C の微分方程式を求めよ.

(3) 曲線 C は $y = 3x$ に接するという. 曲線 C の方程式を求めよ. (1 九大)

6 微分方程式の応用 (現象)

6. 1 半径 R_0 のある原子が燃えるとき, 球状を保ったまま小さくなる. このとき, 体積の減少速度は球径に比例する. 時刻 t における原子の半径 R を R_0 と燃え尽きるのに必要な時間 T で表せ. (53 東大)

6. 2 ある町の時刻 t における人口を $y(t)$ とするとき, $\dfrac{y'}{y}$ は $a - y(t)$ に比例する (a は飽和人口). このとき, $y(t)$ を求めよ. ただし, $t = 0$ のとき $y(0) = N$ で比例定数は k とする. (55 電通大)

6. 3　$mx'' = -kx' - Rx$ を解け．また, 減衰振動となる条件を求めよ．(56　山口大)

7　級数による解法

7. 1　微分方程式 $y'' - y = 0$ のべき級数解を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき, 以下の問に答えよ．

(1) 係数 a_n が満たす漸化式を求めよ．

(2) $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ であるとき, a_n を求めよ．$T-57$

7. 2　微分方程式　$x(x-1)y'' + \{(\alpha+\beta+1)x - \gamma\}y' + \alpha\beta y = 0$　がある．但し, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は定数である．

(1) $y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots$ が上式をみたすように係数を定めよ．

(2) この級数の収束半径を求めよ．(60　東工大)

7. 3　$y' = y,\ y(0) = 1$ の解は $y = e^x$ であることを用いて, 次の問に答えよ．

(1) $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ を $y' = y$ に代入して係数 a_n の漸化式を求めよ．

(2) 与えられた関係式 $y' = y,\ y(0) = 1$ を用いて指数法則 $e^a e^b = e^{a+b}$ を証明せよ．(60　山口大)

8　連立微分方程式

8. 1　次の連立微分方程式を解け．

(1) $\begin{cases} x' - 3y' = -2y \\ x' - 5y' = -4x \end{cases}$　(56　名工大)　(2) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$　(46　信州大)

(3) $\begin{cases} y' = 6y + 2z \\ z' = -y + 4z \end{cases}$　(62　横浜国大)

8. 2　連立微分方程式 $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$　$x(0) = 1,\ y(0) = 0$ を解け．(2　徳島大)

8. 3　xy 平面上の動点 P の $x,\ y$ 座標と時刻 t の間に, $\begin{cases} x' = 3x - 5y \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$　の関係が成立するものとする．$t = 0$ において, 動点 P が $A(1,\ 1)$ に一致するものとして, 次の問に答えよ．

(1) xy 平面上を動点 P が動くとき, uv 平面上を動点 P が $\begin{cases} u = x + y \\ v = -2x + 2y \end{cases}$　の関係にしたがって動くものとする．このとき, 動点 P の $u,\ v$ 座標と t との間には, $\begin{cases} u' = -4v \\ v' = 4u \end{cases}$　の関係が成立することを示せ．

(2) $x,\ y$ を t の関数として求めよ．$T-58$

8. 4　$a_0 = 1,\ b_0 = 1,\ a_n = 3a_{n-1} + b_{n-1},\ b_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1}$ として

(1) $y'' - y' - 6y = a_n - b_n$ を解け．

(2) これと等価な 1 階連立方程式を立てよ．

(3) $t = 0$ のとき, $y = 0,\ y' = 1$ である解を求めよ．(63　東大)

8. 5　2 つの関数 $f(x),\ g(x)$ に　$f'(x) = g(x),\ g'(x) = f(x)$　と初期条件 $f(0) = 1,\ g(0) = 0$ なる関係がある．次の問に答えよ．

(1) $f(x),\ g(x)$ を求めよ

(2) $f(x),\ g(x)$ の n 次導関数を求めよ

(3) $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$ を証明せよ．$T-63$

9 行列微分方程式

9. 1 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ がある.

(1) $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ とするとき, $AX_1 = X_1$ を満たす a の値を求めよ.

(2) $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ とするとき, $AX_2 = 2X_2$ を満たす b の値を求めよ.

(3) $T = (X_1\ X_2)$ としたとき, $T^{-1}AT$ はどうなるか. ただし, T^{-1} は T の逆行列である.

(4) $\overrightarrow{y'}(t) = A\overrightarrow{y}(t)$, $\overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ がある. ただし, $\overrightarrow{y}(t)$ は 2 次元のベクトルである. この微分方程式を (3) の解を用いて解け. (63 九州大)

9. 2 微分方程式 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ x + 4y \end{pmatrix}$ を解く問題がある.

(1) $\begin{pmatrix} x - 2y \\ x + 4y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のときの行列 A を求めよ.

(2) 行列 A の固有値 λ とそのときの単位固有ベクトルを求めよ.

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ なる変数変換行列 P が $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ であるとき, $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を証明せよ.

(4) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, 微分方程式を求め, その方程式を解け.

(5) (4) を用いて一般解 x, y を求めよ. (別な方法でもよい) $T-1$

10 積分方程式

10. 1 $f(x) = (ax+b)e^{\frac{x}{2}}$ がすべての x に対して $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ を満たすように定数 a, b を定めよ. (52 千葉大)

10. 2 $y(t) + \displaystyle\int_0^t (t - \tau + 2)y(\tau)d\tau = t + 1$ について

(1) $y(t)$ が満たす微分方程式を作れ.

(2) $y(t)$ を求めよ. (59 東大)

10. 3 $f(x, y) = 2xy$ のとき, $y_0 = 1$, $y_n = 1 + \displaystyle\int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$ で定義する関数 $y_n(x)$ を非積分形で求めよ. また, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n(x)$ を求めよ. (1 金沢大)

11 差分方程式

11. 1 n についての関数 $f(n)$ が $f(0) = 5$, $f(1) = 11$, $f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 0$ を満たすとき, $f(n)$ を求めよ. (2 北大)

12 偏微分方程式

12. 1 $0 < t < +\infty$ のとき, $f(t)$ は永久に微分できる関数で, $z = f(x^2 + y^2)$ とおく. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, $f(1) = 0$, $f'(1) = -1$ を満たす関数 $z = f(t)$ を求めよ, $N-1$

12. 2 (1) $f(x, y)$ を C^1 級関数とするとき, 領域 D のすべての点で $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ のとき, $f(x, y)$ は D で定

数であることを証明せよ.

(2) $u(x,\, y)$, $v(x,\, y)$ が D で $u_x(x,\, y) = v_y(x,\, y)$, $v_x(x,\, y) = -u_y(x,\, y)$ を満たし, かつ $\{u(x,\, y)\}^2 + \{v(x,\, y)\}^2$ が定数であるとき, $u(x,\, y)$, $v(x,\, y)$ は D で定数であることを証明せよ.　(2　金沢大)

13　総合問題

13.1　$y'' + 2y' + 5y = 0$ という微分方程式がある.

(1) $y_1(x) = e^{ax}\sin bx$ が上の微分方程式を満たす a, b(定数) を求めよ.

(2) $y_2(x) = e^{ax}\cos bx$ の a, b についても上と同じ a, b が当てはまることを示せ.

(3) $y_(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, $y_3(0) = 1$, $y_3'(0) = 0$ であるとき, 定数 c_1, c_2 を求めよ.

(4) $y_3(x)$ の極値 $(0 \leqq x < \infty)$ を求め, グラフの概形を書け.　(2　九州大)

13. 2　連立方程式 $\dfrac{dx}{dt} = -ax$, $\dfrac{dy}{dt} = ax + by$ がある. 条件 $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ であるとき, 上の方程式の解を求めよ. また, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{e^{bt}}$ を求めよ.　(2　山口大)